Solucionario Geometría 2.°

Unidad 1

LÍNEAS Y SEGMENTOS

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 6) Unidad 1

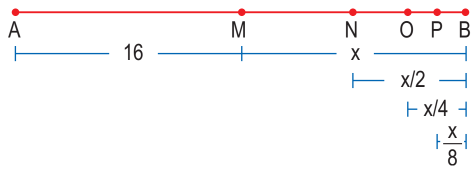
1. Como $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow AB = CD = x$

Luego: $AB + 7 = 12$

$x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$

Clave B

2. Graficamos el segmento AB.



Luego: $16 = x$

$\Rightarrow PB = \frac{x}{8} = 2$

$AP = AB - PB$

$AP = 32 - 2 \Rightarrow AP = 30$

Clave C

3. Por analogía de congruencia:

$6 = 3k$ y $k = 2$

$2 = k$ y $k = 2 \Rightarrow k = 2$

Pues cumple para ambos casos.

Clave A

4. $AB = BC = a$; $DE = EF = b$

$\Rightarrow 2a + 3 + 2b = 17$; $a + b + 3 = x$

$2(a + b) = 14$; $7 + 3 = x$

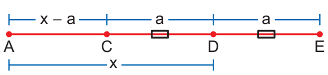
$a + b = 7$; $10 = x$

Clave B

5. Piden: AD

Dato:

D es punto medio de $\overline{CE} \wedge AC + AE = 50$



Como: $AC + AE = 50$

$\Rightarrow x - a + x + a = 50$

$2x = 50$

$\therefore x = 25$

Clave E

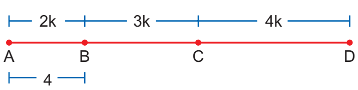
6. Piden: AD

Dato: $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{3} = \frac{CD}{4} = k$

$\Rightarrow AB = 2k$

$BC = 3k$

$CD = 4k$



$\Rightarrow 2k = 4$

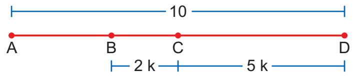
$k = 2$

$\therefore AD = 9k = 9(2) = 18$

Clave B

7. Piden: BD

Dato: $AD = 10$, $CD = AB + BC \wedge \frac{BC}{CD} = \frac{2k}{5k}$



Del gráfico:

Como: $CD = AB + BC$

$5k = AB + 2k$

$\Rightarrow AB = 3k$

Por dato:

$AD = 10$

$3k + 2k + 5k = 10$

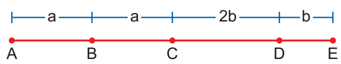
$\Rightarrow k = 1$

$\therefore BD = 7k = 7(1) = 7$

Clave A

8. Piden: AD

Dato: $AB = BC$; $CD = 2DE \wedge AB + AE = 6$



Como: $AB + AE = 6$

$a + 2a + 3b = 6$

$3(a + b) = 6$

$a + b = 2$

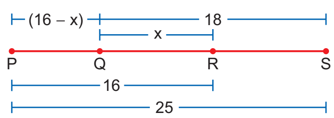
Entonces:

$AD = 2a + 2b = 2(a + b) = 2(2) = 4$

Clave D

9. Piden: QR

Dato: $PR = 16$, $QS = 18$ y $PS = 25$



Del gráfico:

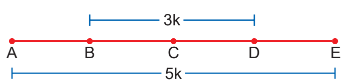
$25 - 18 = 16 - x$

$7 = 16 - x \Rightarrow x = 9$

Clave B

10. Piden: AE

Dato: $BD = \frac{3}{5}AE \wedge AC + BD + CE = 40$



Como: $AC + BD + CE = 40$

$\Rightarrow (AB + BC) + (BC + CD) + (CD + DE) = 40$

$AB + 2(BC + CD) + DE = 40$

$AB + DE + 2(BC + CD) = 40$

$2k + 2(3k) = 40$

$k = 5$

$\therefore AE = 5k = 25$

Clave B

11. Piden: $\frac{AB}{BC}$

Dato: $AC + AB = \frac{4}{3}BC$

Del gráfico: $AC = AB + BC$

Como: $AC + AB = \frac{4}{3}BC$

$(AB + BC) + AB = \frac{4}{3}BC$

$2AB = \frac{4}{3}BC - BC$

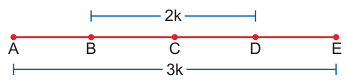
$2AB = \frac{BC}{3}$

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{1}{6}$

Clave D

12. Piden: AE

Dato: $\frac{AE}{BD} = \frac{3k}{2k} \wedge AC + BD + CE = 45$



Como: $AC + BD + CE = 45$

$\Rightarrow (AB + BC) + (BC + CD) + (CD + DE) = 45$

$AB + 2(BC + CD) + DE = 45$ ...(1)

Del gráfico:
$AB + DE = 3k - 2k = k$

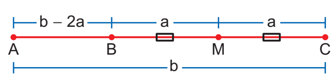
Reemplazando en (1):
$\Rightarrow k + 2(2k) = 45$
$5k = 45$
$k = 9 \Rightarrow AE = 3k$

$\therefore AE = 3(9) = 27$

Clave A

13. Piden: AM

Dato:
M: punto medio de $\overline{BC} \wedge AB + AC = 12$



Como: $AB + AC = 12$
$b - 2a + b = 12$
$2b - 2a = 12$
$b - a = 6$
$\Rightarrow AM = b - 2a + a = b - a$
$\therefore AM = 6$

Clave A

14. Piden: CD

Dato: $AB = 8 \wedge (AB)(BD) = (AC)(CD)$

Como:
$(AB)(BD) = (AC)(CD)$
Del gráfico:
$8(BC + CD) = (8 + BC)CD$
$8BC + 8CD = 8CD + BC(CD)$
$8BC = (BC)(CD)$
$\therefore CD = 8$

Clave B

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

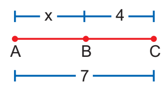
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



Piden: x

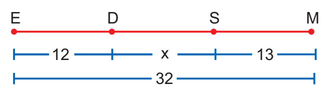
Del gráfico: $AB = AC - BC$

$\Rightarrow x = 7 - 4$

$\therefore x = 3$

Clave C

5.



Piden: x

Del gráfico:

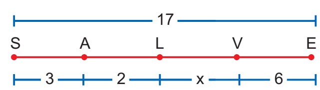
$EM = ED + DS + SM$

$\Rightarrow 32 = 12 + x + 13$

$\therefore x = 7$

Clave D

6.



Piden: x

Del gráfico:

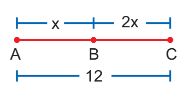
$SE = SA + AL + LV + VE$

$\Rightarrow 17 = 3 + 2 + x + 6$

$\therefore x = 6$

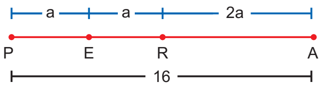
Clave D

7.



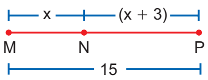
Piden: x
Del gráfico:
$AC = AB + BC$
$\Rightarrow 12 = x + 2x$
$\therefore \quad x = 4$

Clave E

8.


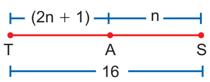
Piden: a
Del gráfico:
PA = PE + ER + RA
⇒ 16 = a + a + 2a
∴ a = 4

Clave E

9.


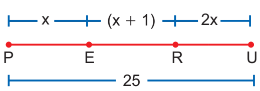
Piden: x
Del gráfico:
MP = MN + NP
⇒ 15 = x + (x + 3)
15 = 2x + 3
12 = 2x
∴ x = 6

Clave E

10.


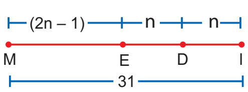
Piden: n
Del gráfico:
TS = TA + AS
16 = (2n + 1) + n
15 = 3n
∴ n = 5

Clave C

11.


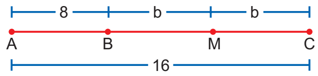
Piden: x
Del gráfico:
PU = PE + ER + RU
⇒ 25 = x + (x + 1) + 2x
24 = 4x
∴ x = 6

Clave A

12.


Piden: n
Del gráfico:
MI = ME + ED + DI
31 = 2n – 1 + n + n
32 = 4n
∴ n = 8

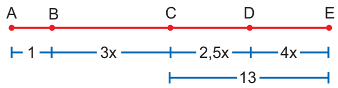
Clave B

13.


Piden: b
Del gráfico:
AC = AB + BM + MC
⇒ 16 = 8 + b + b
8 = 2b
∴ b = 4

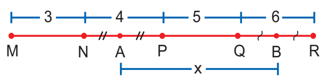
Clave A

Resolución de problemas

14.


Piden: AC
Del gráfico:
2,5x + 4x = 13
6,5x = 13 ⇒ x = 2
AC = 1 + 3x = 1 + 3(2)
∴ AC = 7

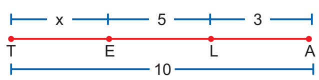
Clave E

15.


Piden: x
Del gráfico:
x = AP + PQ + QB
∴ x = 2 + 5 + 3 = 10

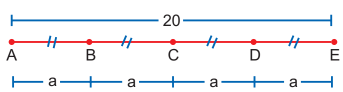
Clave A

16. Piden: TE
Dato:
EL = 5, LA = 3 y TA = 10



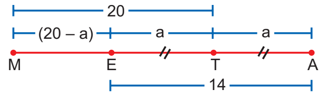
Del gráfico:
TA = TE + EL + LA
⇒ 10 = TE + 5 + 3
∴ TE = 2

Clave A

17.


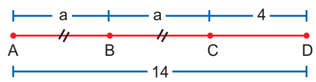
Piden: AC
Del gráfico:
AE = AB + BC + CD + DE
20 = a + a + a + a
20 = 4a
a = 5
Como: AC = 2a = 2(5) = 10

Clave D

18.


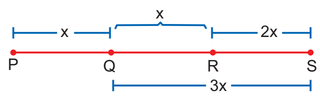
Piden: ME
Del gráfico:
EA = ET + TA
14 = a + a
a = 7
∴ ME = 20 – a = 20 – 7 = 13

Clave A

19.


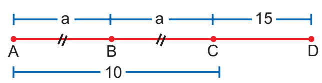
Piden: BC + CD
Del gráfico:
AD = AB + BC + CD
14 = a + a + 4
10 = 2a
⇒ a = 5
∴ BC + CD = 5 + 4 = 9

Clave A

20.


Piden: x
Del gráfico:
PS = PQ + QR + RS
⇒ 20 = x + x + 2x
20 = 4x
5 = x

Clave C

21.


Piden: BD
Del gráfico:
AC = AB + BC
10 = a + a
⇒ a = 5

Por lo tanto: BD = a + 15 = 5 + 15
BD = 20

Clave A

Nivel 2 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

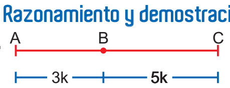
22.

23.

Clave B

24.

Razonamiento y demostración

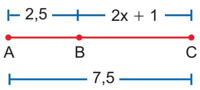
25.


Piden: AC

Del gráfico:
$AC = AB + BC$
$40 = 3k + 5k$
$40 = 8k \Rightarrow k = 5$
$\therefore BC = 5k = 25$

Clave D

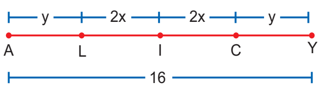
26.



Piden: x
Del gráfico:
$AC = AB + BC$
$7{,}5 = 2{,}5 + 2x + 1$
$\therefore x = 2$

Clave D

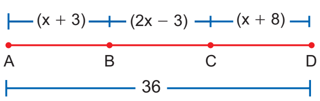
27.



Del gráfico:
$AY = AL + LI + IC + CY$
$16 = y + 2x + 2x + y$
$16 = 4x + 2y$
$\therefore\ 2x + y = 8$

Clave E

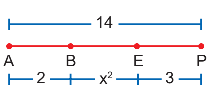
28.



Piden: x
Del gráfico:
$AD = AB + BC + CD$
$36 = x + 3 + 2x - 3 + x + 8$
$28 = 4x$
$\therefore x = 7$

Clave C

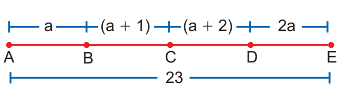
29.



Piden: x
Del gráfico:
$AP = AB + BE + EP$
$\Rightarrow 14 = 2 + x^2 + 3$
$9 = x^2$
$\therefore x = 3$

Clave B

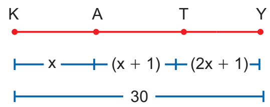
30.



Piden: a
Del gráfico:
$AE = AB + BC + CD + DE$
$\Rightarrow 23 = a + a + 1 + a + 2 + 2a$
$20 = 5a$
$\therefore a = 4$

Clave A

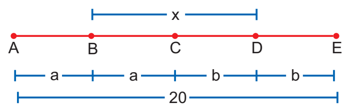
31.



Piden: x
Del gráfico:
$KY = KA + AT + TY$
$\Rightarrow 30 = x + x + 1 + 2x + 1$
$28 = 4x \qquad \therefore x = 7$

Clave E

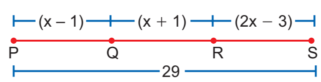
32.



Piden: x
Del gráfico:
$AE = AB + BC + CD + DE$
$\Rightarrow 20 = a + a + b + b$
$20 = 2(a + b)$
$10 = a + b$
$\therefore x = a + b = 10$

Clave D

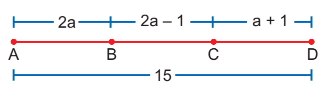
33.



Piden: x
Del gráfico:
$PS = PQ + QR + RS$
$\Rightarrow 29 = (x - 1) + (x + 1) + (2x - 3)$
$32 = 4x$
$\therefore\ x = 8$

Clave B

34.

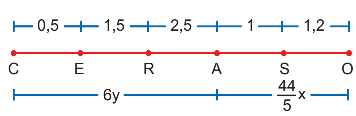


Piden: a
Del gráfico:
$AD = AB + BC + CD$
$\Rightarrow 15 = 2a + 2a - 1 + a + 1$
$15 = 5a$
$\therefore a = 3$

Clave D

Resolución de problemas

35.

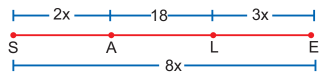


Del gráfico:
$$AO = \frac{44x}{5}$$
$$1 + 1{,}2 = \frac{44}{5}x \Rightarrow 5(2{,}2) = 44x$$
$$11 = 44x$$
$$x = 0{,}25$$

$CA = 6y$
$0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5 = 6y$
$4{,}5 = 6y \Rightarrow y = 0{,}75$
$\therefore x + y = 1$

Clave A

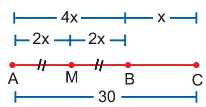
36. Piden: AL
Dato:
$SA = 2x$, $LE = 3x$ y $SE = 8x$



Del gráfico:
$SE = SA + AL + LE$
$8x = 2x + 18 + 3x$
$3x = 18$
$x = 6$

Clave E

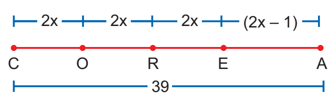
37.



Piden: AM
Del gráfico: $AM = MB$
$AC = AM + MB + BC$
$\Rightarrow 30 = 2x + 2x + x$
$30 = 5x$
$\Rightarrow 6 = x$
$\therefore\ AM = 2x = 2(6) = 12$

Clave B

38.



Piden: CO + RE
Del gráfico:
$CA = CO + OR + RE + EA$
$\Rightarrow 39 = 2x + 2x + 2x + 2x - 1$
$40 = 8x$
$x = 5$
$\therefore CO + RE = 2x + 2x = 4x = 4(5) = 20$

Clave A

Nivel 3 (página 10) Unidad 1

Comunicación matemática

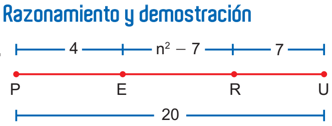
39.

Clave A

40.

Razonamiento y demostración

41.



Piden: n
Del gráfico:
$PU = PE + ER + RU$

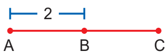
$\Rightarrow 20 = 4 + n^2 - 7 + 7$
$16 = n^2$
$\therefore n = 4$

Clave E

42. Piden: BC

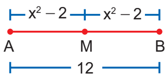
Dato:

$AC = 6$ y $AB = 6\ 64^{\frac{1}{6}} = 2$



Del gráfico:
$AC = AB + BC$
$6 = 2 + BC$
$BC = 4$

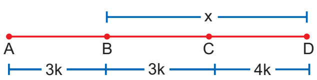
Clave D

43. 

Piden: x
Del gráfico:
$AB = AM + MB$
$\Rightarrow 12 = x^2 - 2 + x^2 - 2$
$16 = 2x^2$
$8 = x^2$
$\therefore x = 2\sqrt{2}$

Clave C

Resolución de problemas

44. 

Piden: x
Dato:

$\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{3k}{4k}$, $AB = BC$ y $AD = 20$

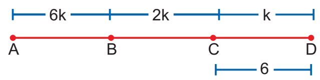
Como:
$AD = AB + BC + CD$
$20 = 3k + 3k + 4k$
$20 = 10k$
$2 = k$
$\Rightarrow x = BC + CD = 3k + 4k = 7(2) = 14$

Clave A

45. Piden: AD

Dato: $AB = 3BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3k}{1k} = \dfrac{6k}{2k}$

$BC = 2CD \Rightarrow \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{2k}{k}$



Del gráfico: $k = 6$
Como: $AD = 9k = 9(6) = 54$

Clave B

46. Piden: AC

Dato: $AB = \dfrac{BC}{2}$ $\wedge$ $BC = \dfrac{CD}{3}$

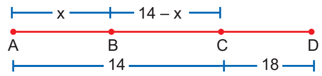
Del gráfico:
$CD = 12$
$6k = 12 \Rightarrow k = 2$

Piden: $AC = AB + BC = k + 2k$
$\therefore AC = 3k = 3(2) = 6$

Clave B

47. Piden: AB

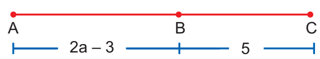
Dato: $\dfrac{BC}{2} = \dfrac{CD}{6} \Rightarrow 3BC = CD$ y $AC = 14$



Como: $3BC = CD$
$\Rightarrow 3(14 - x) = 18$
$42 - 3x = 18$
$3x = 24$
$x = 8$
$\therefore AB = x = 8$

Clave A

48. Dato: $AB = 5BC$



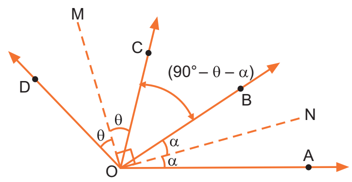
Piden: a
Como: $AB = 5BC$
$2a - 3 = 5(5)$
$\Rightarrow 2a - 3 = 25$
$2a = 28$
$\therefore a = 14$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 12) Unidad 1

1. Piden: $m\angle DOB + m\angle COA$

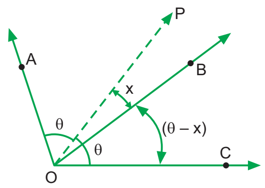
Dato:
$m\angle MON = 90°$, formado por las bisectrices del $\angle AOB \wedge \angle COD$.



Como piden:
$m\angle DOB + m\angle COA$
$\Rightarrow$ Del gráfico:
$2\theta + (90° - \theta - \alpha) + (90° - \theta - \alpha) + 2\alpha$
$2\theta + 90° - \theta - \alpha + 90° - \theta - \alpha + 2\alpha$
$2\theta - 2\theta - 2\alpha + 2\alpha + 180° = 180°$
$\therefore m\angle DOB + m\angle COA = 180°$

Clave A

2. Piden:
La medida del ángulo que forma la bisectriz del $\angle AOC$ y el rayo OB: x
Dato: $m\angle AOB - m\angle BOC = 30°$

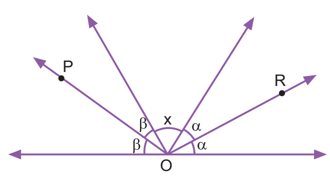


Del gráfico:
Dato: $m\angle AOB - m\angle BOC = 30°$
$\Rightarrow \theta + x - (\theta - x) = 30°$
$\theta - \theta + 2x = 30°$
$2x = 30° \qquad \therefore x = 15°$

Clave E

3. Piden: x

Dato: $m\angle POR = 100°$



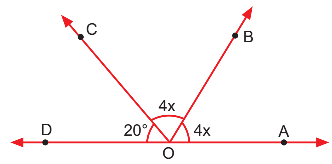
Del gráfico:
$2\beta + x + 2\alpha = 180° \qquad ...(1)$
Por dato:
$\beta + x + \alpha = 100° \qquad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):
$\beta + \underbrace{\beta + x + \alpha}_{100°} + \alpha = 180°$
$\Rightarrow \beta + \alpha = 80° \qquad ...(3)$

Reemplazando (3) en (2):
$\beta + x + \alpha = 100°$
$80° + x = 100°$
$\therefore x = 20°$

Clave A

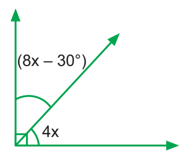
4. Piden: x



Del gráfico:
$m\angle DOA = 180°$
$\Rightarrow 20° + 4x + 4x = 180°$
$8x = 160°$
$\therefore x = 20°$

Clave C

5. Piden: x



Del gráfico, sabemos:
$8x - 30° + 4x = 90°$
$12x = 120°$
$\therefore x = 10°$

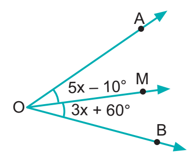
Clave A

6. Piden: x

Dato:
Complemento: $(90° - x)$
$\Rightarrow x - (90° - x) = 10°$
$x - 90° + x = 10°$
$2x = 100°$
$\therefore x = 50°$

Clave E

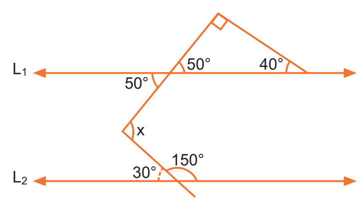
7. Piden: x



Como $\overleftrightarrow{OM}$ es bisectriz del $\angle AOB$:
$\Rightarrow 5x - 10° = 3x + 60°$
$2x = 70°$
$\therefore x = 35°$

Clave C

8. Piden: x
Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

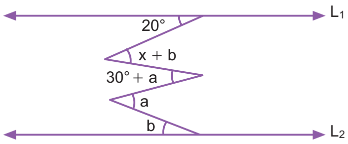


Por propiedad:
$x = 50° + 30°$
$\therefore x = 80°$

Clave B

9. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



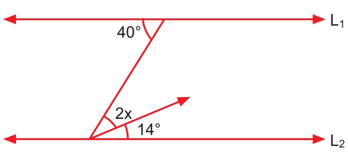
Por propiedad: $x + b + a = 20° + 30° + a + b$

$\therefore x = 50°$

Clave E

10. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por ser alternos internos:

$\Rightarrow 40° = 2x + 14°$

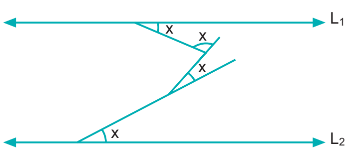
$26° = 2x$

$\therefore x = 13°$

Clave C

11. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por propiedad:

$x + x + x + x = 180°$

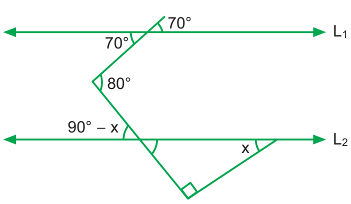
$4x = 180°$

$\therefore x = 45°$

Clave E

12. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



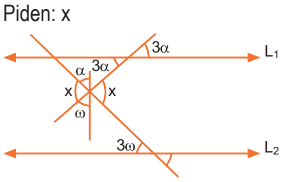
Por propiedad:

$70° + 90° - x = 80°$

$\therefore x = 80°$

Clave D

13. Piden: x



Por propiedad:

$x = 3\alpha + 3\omega$

$x = 3(\alpha + \omega) \Rightarrow \alpha + \omega = \dfrac{x}{3}$

$x + \alpha + \omega = 180°$

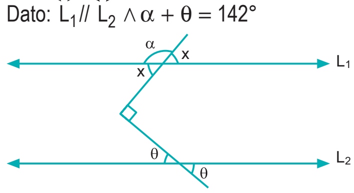
$x + \dfrac{x}{3} = 180° \Rightarrow \dfrac{4x}{3} = 180°$

$\therefore x = 135°$

Clave C

14. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \wedge \alpha + \theta = 142°$ ...(1)



Por propiedad: $x + \theta = 90°$ ...(2)

También: $\alpha + x = 180°$ ...(3)

Sumando (2) y (3):

$2x + \theta + \alpha = 270°$

Reemplazando (1) en (3):

$2x + 142° = 270°$

$\Rightarrow 2x = 128°$

$\therefore x = 64°$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 14) Unidad 1

Comunicación matemática

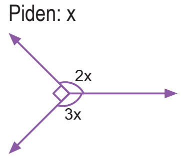
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. Piden: x



Del gráfico:

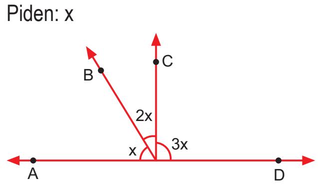
$90° + 2x + 3x = 360°$

$5x = 270°$

$\therefore x = 54°$

Clave B

5. Piden: x



Del gráfico, sabemos:

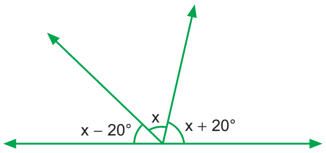
$x + 2x + 3x = 180°$

$6x = 180°$

$\therefore x = 30°$

Clave B

6.

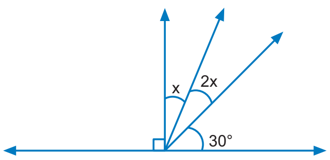


$x - 20° + x + x + 20° = 180°$

$3x = 180° \quad \therefore x = 60°$

Clave A

7. Piden: x



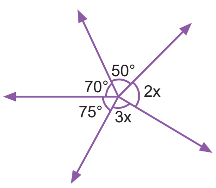
Del gráfico:

$90° + x + 2x + 30° = 180°$

$3x = 60° \quad \therefore x = 20°$

Clave E

8. Piden: x



Del gráfico:

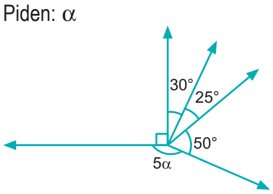
$70° + 50° + 75° + 2x + 3x = 360°$

$5x = 165°$

$\therefore x = 33°$

Clave D

9. Piden: α



Del gráfico:

$90° + 30° + 25° + 50° + 5\alpha = 360°$

$5\alpha = 165°$

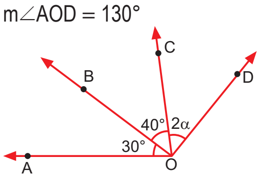
$\therefore \alpha = 33°$

Clave A

10. Piden: α

Dato:

$m\angle AOD = 130°$



Como: $m\angle AOD = 130°$

$\Rightarrow 30° + 40° + 2\alpha = 130°$

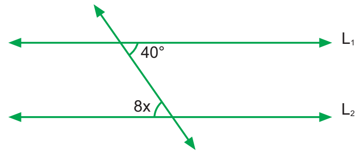
$2\alpha = 60°$

$\therefore \alpha = 30°$

Clave B

11. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



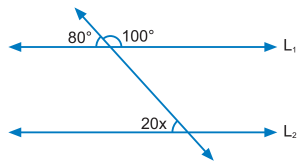
Por ser ángulos alternos internos:

$\Rightarrow 40° = 8x \quad \therefore x = 5°$

Clave A

12. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



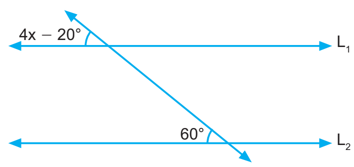
Por ser ángulos correspondientes:

$\Rightarrow 80° = 20x \quad \therefore x = 4°$

Clave B

13. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



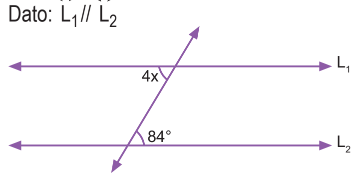
Por ser ángulos correspondientes:

$4x - 20° = 60° \quad \therefore x = 20°$

Clave D

14. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



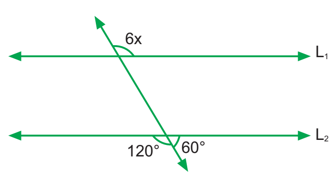
Por ser ángulos alternos internos:

$\Rightarrow 4x = 84° \quad \therefore x = 21°$

Clave C

15. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por ser ángulos conjugados externos:

$\Rightarrow 6x + 60° = 180°$

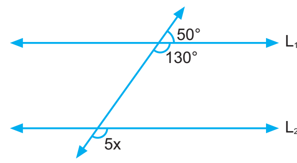
$6x = 120°$

$\therefore x = 20°$

Clave B

16. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por ser ángulos correspondientes:

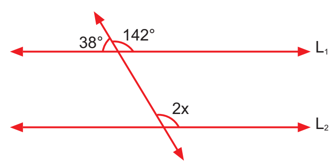
$\Rightarrow 5x = 130°$

$x = 26°$

Clave E

17. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por ser ángulos correspondientes:

$\Rightarrow 142° = 2x$

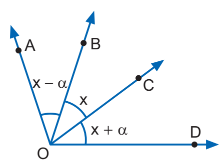
$\therefore x = 71°$

Clave E

Resolución de problemas

18. Piden: x

Dato: $m\angle AOD = 102°$



Como: $m\angle AOD = 102°$

$\Rightarrow x - \alpha + x + x + \alpha = 102°$

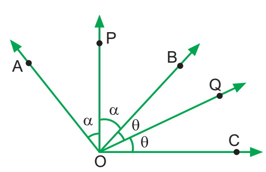
$3x = 102°$

$\therefore x = 34°$

Clave E

19. Piden: $m\angle POQ$

Dato: $m\angle AOC = 160°$



Del gráfico:

$m\angle AOC = 160°$

$\Rightarrow 2\alpha + 2\theta = 160°$

$2(\alpha + \theta) = 160°$

$\alpha + \theta = 80°$

$\Rightarrow m\angle POQ = \alpha + \theta$

$\therefore m\angle POQ = 80°$

Clave D

20. Piden: el mayor ángulo

Sean: $\alpha \wedge \beta$ ángulos complementarios

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \alpha - \beta &= 40° \\ \alpha + \beta &= 90° \quad (+) \\ \hline 2\alpha &= 130° \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha = 65° \quad \wedge \quad \beta = 25°$

$\therefore$ El mayor ángulo es: $\alpha = 65°$

Clave E

21. Piden: θ

Dato: son congruentes

$\Rightarrow 4\theta + 28° = 60° - 4\theta$

$8\theta = 32°$

$\therefore \theta = 4°$

Clave C

22. Piden: el mayor ángulo

Dato: par lineal = suplementarios

$\Rightarrow m1.^{er}\angle = \alpha \ \wedge \ m2.^{o}\angle = \alpha + 38°$

Como son suplementarios:

$\Rightarrow \alpha + \alpha + 38° = 180°$

$2\alpha = 142°$

$\alpha = 71°$

$\therefore m1.^{er}\angle = 71° \quad \wedge \quad m2.^{o}\angle = 109°$

$\therefore$ El mayor ángulo es: 109°

Clave E

23. Piden: el menor ángulo

Dato: par lineal = suplementarios

$\Rightarrow m1.^{er}\angle = \theta \qquad \wedge \qquad m2.^{o}\angle = \theta + 58°$

Como son suplementarios:

$\Rightarrow \theta + \theta + 58° = 180°$

$2\theta = 122°$

$\theta = 61°$

$\Rightarrow m1.^{er}\angle = 61° \ \wedge \ m2.^{o}\angle = 119°$

$\therefore$ El menor ángulo es: 61°

Clave A

24. Piden: el mayor ángulo

Dato: complementarios:

$\Rightarrow m1.^{er}\angle = \theta \quad \wedge \quad m2.^{o}\angle = \theta + 18°$

Por ser complementarios:

$\Rightarrow \theta + \theta + 18° = 90°$

$2\theta = 72°$

$\theta = 36°$

$\Rightarrow m1.^{er}\angle = 36° \ \wedge \ m2.^{o}\angle = 54°$

$\therefore$ El mayor ángulo es: 54°

Clave B

25. Piden: el mayor ángulo

Dato:

$m1.^{er}\angle = \alpha \qquad \wedge \qquad m2.^{o}\angle = \alpha + 32°$

Como son suplementarios:

$\Rightarrow \alpha + \alpha + 32° = 180°$

$2\alpha = 148°$

$\alpha = 74°$

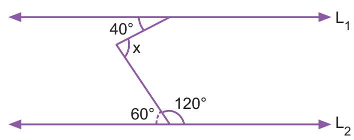
$\therefore m1.^{er}\angle = 74° \quad \wedge \quad m2.^{o}\angle = 106°$

$\therefore$ El mayor ángulo es: 106°

Clave C

26. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por propiedad:

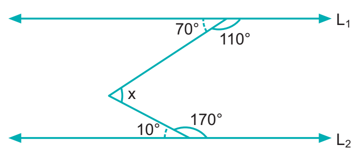
$x = 40° + 60°$

$\therefore x = 100°$

Clave B

27. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por propiedad:

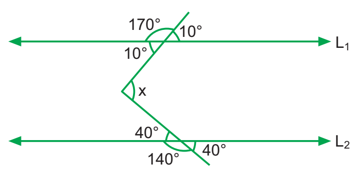
$x = 70° + 10°$

$\therefore x = 80°$

Clave C

28. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por propiedad:

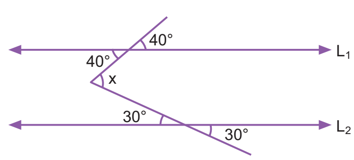
$x = 10° + 40°$

$\therefore x = 50°$

Clave C

29. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por propiedad:

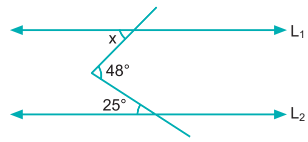
$\Rightarrow x = 40° + 30°$

$\therefore x = 70°$

Clave C

30. Piden: x

Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por propiedad:

$x + 25° = 48°$

$\therefore x = 23°$

Clave C

Nivel 2 (página 16) Unidad 1

Comunicación matemática

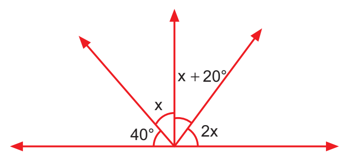
31.

32.

33.

Razonamiento y demostración

34. Piden: x



Del gráfico, sabemos:

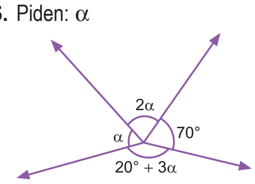
$40° + x + x + 20° + 2x = 180°$

$4x = 120°$

$\therefore x = 30°$

Clave D

35. Piden: α



Del gráfico:

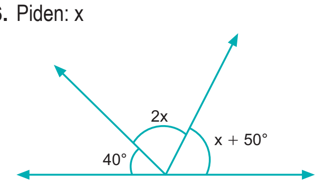
$\alpha + 2\alpha + 70° + 20° + 3\alpha = 360°$

$6\alpha = 270°$

$\therefore \alpha = 45°$

Clave D

36. Piden: x



Del gráfico:

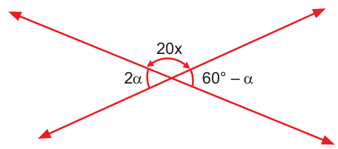
$40° + 2x + x + 50° = 180°$

$3x = 90°$

$\therefore x = 30°$

Clave A

37. Piden: x



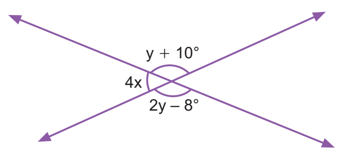
Del gráfico:
$2\alpha = 60° - \alpha$
$3\alpha = 60°$
$\alpha = 20°$ ...(1)

También:
$2\alpha + 20x = 180°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$2(20°) + 20x = 180°$
$20x = 140°$
$\therefore x = 7°$

Clave B

38. Piden: x

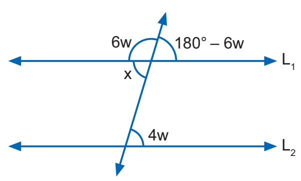


Del gráfico, por ser opuestos por el vértice:
$y + 10° = 2y - 8°$
$18° = y$ ...(1)
$4x + y + 10° = 180°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$\Rightarrow 4x + 18° + 10° = 180°$
$4x = 152°$
$\therefore x = 38°$

Clave B

39. Piden: x
Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



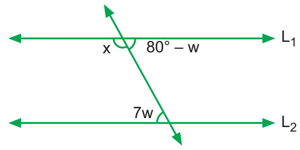
Por ser ángulos alternos internos:
$x = 4w$ ...(1)

Por ser ángulos correspondientes:
$4w = 180° - 6w$
$10w = 180°$
$w = 18°$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$x = 4(w) = 4(18°) = 72°$

Clave B

40. Piden: x



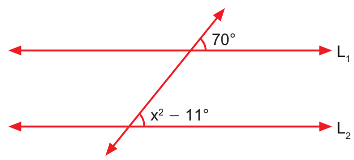
Por ser ángulos alternos internos:
$7w = 80° - w$
$8w = 80°$
$w = 10°$ ...(1)

También:
$x + 80° - w = 180°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$x + 80° - 10° = 180°$
$\therefore x = 110°$

Clave E

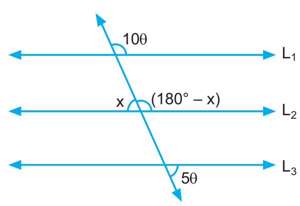
41. Piden: x
Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por ser ángulos correspondientes:
$\Rightarrow 70° = x^2 - 11°$
$81° = x^2$
$\therefore x = 9°$

Clave C

42. Piden: x
Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$



Por ser ángulos correspondientes entre $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$:

$10\theta = 180° - x$ ...(1)

Por ser conjugados externos entre $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_3}$:
$10\theta + 5\theta = 180°$
$\theta = 12°$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$10(12°) = 180° - x$
$x = 180° - 120°$
$\therefore x = 60°$

Clave B

Resolución de problemas

43. Piden: el menor ángulo
Dato:

1.^{er} ángulo	2.° ángulo
α	4α

Como son complementarios:
$\Rightarrow \alpha + 4\alpha = 90°$
$5\alpha = 90°$
$\alpha = 18°$
$\Rightarrow m\,1.^{er}\angle = 18° \wedge m\,2.^{o}\angle = 72°$

$\therefore$ El menor ángulo es: 18°

Clave B

44. Piden: el mayor ángulo
Dato: $m1.^{er}\angle = \alpha \quad \wedge \quad m2.^{o}\angle = \alpha + 64°$

Como son suplementarios:
$\Rightarrow \alpha + \alpha + 64° = 180°$
$2\alpha = 116°$
$\alpha = 58°$
$\Rightarrow m1.^{er}\angle = 58° \wedge m2.^{o}\angle = 122°$

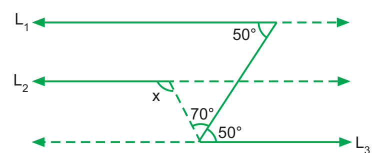
$\therefore$ El mayor ángulo es: 122°

Clave B

45. Piden: x
Dato: son opuestos por el vértice
$\Rightarrow 3x - 20° = x + 28°$
$2x = 48°$
$\therefore x = 24°$

Clave A

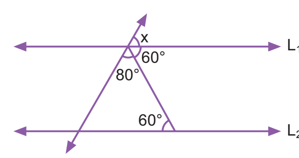
46. Piden: x
Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$



Por ser ángulos alternos internos entre las rectas $\overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$:
$\Rightarrow x = 70° + 50°$
$\therefore x = 120°$

Clave D

47. Piden: x
Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

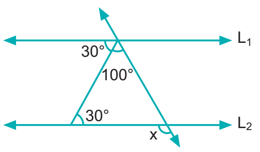


Del gráfico:
$x + 60° + 80° = 180°$
$\therefore x = 40°$

Clave A

48. Piden: x

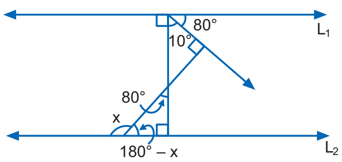
Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Por ser ángulos correspondientes:
$x = 130°$

Clave E

49. Piden: x



Trazamos la recta $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$
Por propiedad:
$80° + 180° - x = 90°$
$260° - x = 90°$
$x = 170°$

Clave A

Nivel 3 (página 18) Unidad 1

Comunicación matemática

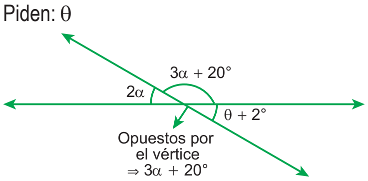
50.

51.

52.

Razonamiento y demostración

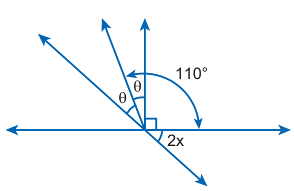
53. Piden: θ



Del gráfico:
$2\alpha + 2(3\alpha + 20°) + \theta + 2° = 360°$
$8\alpha + \theta = 318°$ ...(1)
$2\alpha = \theta + 2°$
$8\alpha = 4\theta + 8°$ ...(2)
Reemplazando (2) en (1):
$4\theta + 8° + \theta = 318°$
$5\theta = 310°$
$\therefore \theta = 62°$

Clave C

54. Piden: x

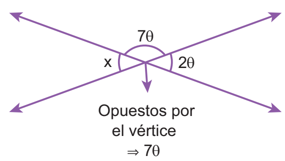


Del gráfico:
$2\theta + 90° + 2x = 180°$
$\theta + x = 45°$ ...(1)
$\theta + 90° = 110°$
$\theta = 20°$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$20° + x = 45°$
$\therefore x = 25°$

Clave D

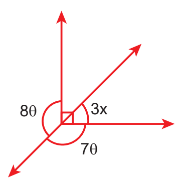
55. Piden: x



Del gráfico:
$x = 2\theta$ ...(1)
$x + 7\theta + 2\theta + 7\theta = 360°$
$x + 16\theta = 360°$ ...(2)
Reemplazando (1) en (2):
$2\theta + 16\theta = 360°$
$18\theta = 360°$
$\theta = 20°$
$\therefore x = 2\theta = 2(20°) = 40°$

Clave D

56. Piden: x

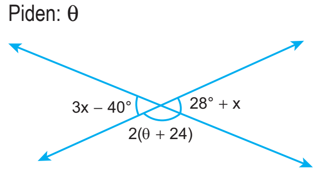


Del gráfico:
$8\theta + 90° + 7\theta = 360°$
$15\theta = 270°$
$\theta = 18°$ ...(1)
Además:
$7\theta + 3x = 180°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$7(18°) + 3x = 180°$
$126° + 3x = 180°$
$3x = 54°$
$\therefore x = 18°$

Clave D

57. Piden: θ



Del gráfico:
Por ser opuestos por el vértice:
$\Rightarrow 3x - 40° = 28° + x$
$2x = 68°$
$x = 34°$ ...(1)

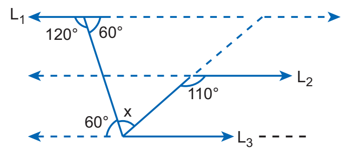
Además:
$2(\theta + 24°) + 28° + x = 180°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$2(\theta + 24°) + 28° + 34° = 180°$
$\therefore \theta = 35°$

Clave A

58. Piden: x

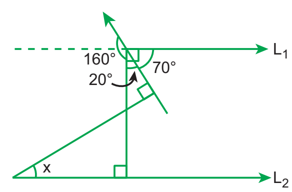
Dato: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$



Por ángulos alternos internos entre las rectas $\overleftrightarrow{L_2} \wedge \overleftrightarrow{L_3}$:
$60° + x = 110°$
$\therefore x = 50°$

Clave E

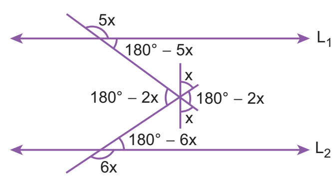
59. Piden: x



Trazamos la recta $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.
Por propiedad:
$x + 70° = 90°$
$\therefore x = 20°$

Clave C

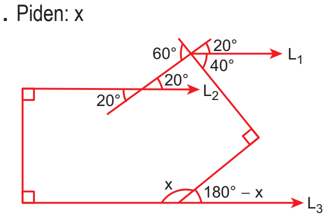
60. Piden: x



Por propiedad:
$180° - 2x = 180° - 5x + 180° - 6x$
$-2x = 180° - 11x$
$9x = 180° \Rightarrow x = 20°$

Clave C

61. Piden: x



Trazamos $\overleftrightarrow{L_1}$ tal que: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

Por propiedad:

$40° + 180° - x = 90°$

$220° - x = 90°$

$\therefore x = 130°$

Clave C

Resolución de problemas

62. Piden: x

Dato:

$x = 3S_{(x)}$

Suplemento: $(180° - x)$

$\Rightarrow x = 3(180° - x)$

$x = 540° - 3x$

$4x = 540°$

$\therefore x = 135°$

Clave B

63. Piden: el menor ángulo

Dato:

$m1.^{er}\angle = \theta \quad \wedge \quad m2.^{o}\angle = 8\theta$

Como son suplementarios:

$\Rightarrow \theta + 8\theta = 180°$

$9\theta = 180°$

$\theta = 20°$

$m1.^{er}\angle = 20° \quad \wedge \quad m2.^{o}\angle = 160°$

$\therefore$ El menor ángulo es: 20°

Clave B

64. Piden: el menor ángulo

Dato: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{2k}{3k}$

Como son complementarios:

$\Rightarrow 2k + 3k = 90°$

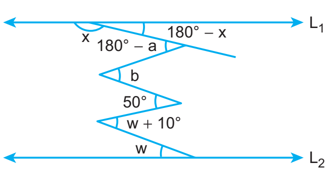
$5k = 90°$

$k = 18°$

$\therefore$ El menor ángulo es: $2k = 2(18°) = 36°$

Clave D

65. Piden: x



Por propiedad:

$180° - x + b + w + 10° = 180° - a + 50° + w$

$-x + b + 10° = -a + 50$

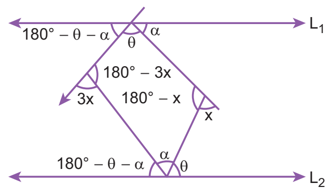
$\underbrace{b + a} - 40° = x$

$160° - 40° = x$

$\therefore x = 120°$

Clave E

66. Piden: x



$180° - x = \theta + \alpha$ ...(1)

$180° - \theta - \alpha + 180° - \theta - \alpha = 180° - 3x$

$180° + 3x = 2(\alpha + \theta)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

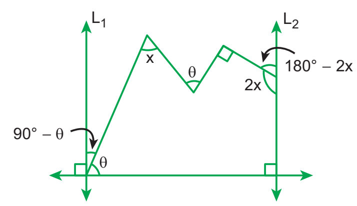
$180° + 3x = 2(180° - x)$

$180° + 3x = 360° - 2x$

$5x = 180° \Rightarrow x = 36°$

Clave E

67. Piden: x



Trazamos $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$:

Por propiedad:

$90° - \theta + \theta + 180° - 2x = x + 90°$

$270° - 2x = x + 90°$

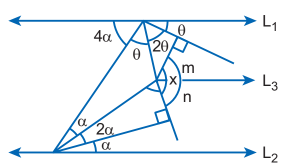
$180° = 3x$

$\therefore x = 60°$

Clave E

68. Piden: x

Trazamos $\overleftrightarrow{L_1}$ tal que $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$.



Se observa:

$4\alpha + 4\theta = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 45°$

Como $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_3}$, por propiedad:

$\theta + m = 90°$ ...(1)

También $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_3}$, por propiedad:

$\alpha + n = 90°$ ...(2)

Sumando (1) y (2):

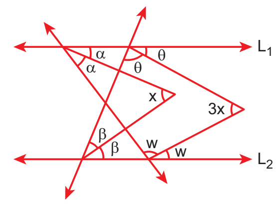
$\alpha + \theta + m + n = 180°$

$45° + x = 180°$

$\therefore x = 135°$

Clave A

69. Piden: x



Por propiedad:

$x = \alpha + \beta$ ...(1)

$3x = \theta + w$ ...(2)

Además:

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha + 2w = 180° \\ 2\beta + 2\theta = 180° \end{array}\right\}(+)$$

$2(\alpha + \beta + w + \theta) = 360°$

$\alpha + \beta + w + \theta = 180°$ ...(3)

Sumando (1) y (2):

$4x = \alpha + \beta + \theta + w$

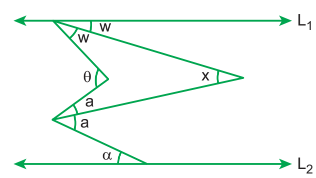
Reemplazando en (3):

$4x = 180°$

$\therefore x = 45°$

Clave C

70. Piden: x



Dato: $\theta - \alpha = \dfrac{x}{2} + 45°$

Por propiedad:

$2w + 2a = \theta + \alpha$ ...(1)

$w + a = x + \alpha$ ...(2)

De (1):

$w + a = \dfrac{(\theta + \alpha)}{2}$

Reemplazando en (2):

$\dfrac{(\theta + \alpha)}{2} = x + \alpha \Rightarrow \theta + \alpha = 2x + 2\alpha$

$\theta - \alpha = 2x$ ...(3)

Reemplazando el dato en (3):

$\dfrac{x}{2} + 45° = 2x$

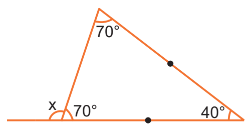
$45° = \dfrac{3x}{2}$

$\therefore x = 30°$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 21) Unidad 1

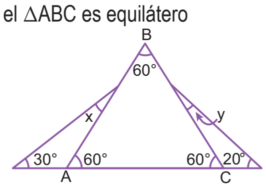
1. Piden: x



Del gráfico:
$x = 70° + 40°$
$\therefore x = 110°$

Clave B

2. Piden: (x + y)
Dato: el $\triangle ABC$ es equilátero



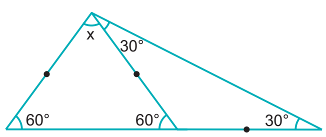
Del gráfico:
$30° + x = 60°$
$\Rightarrow x = 30°$

$y + 20° = 60°$
$\Rightarrow y = 40°$

$\therefore x + y = 30° + 40° = 70°$

Clave D

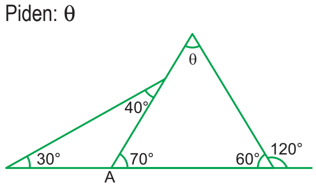
3. Piden: x



Del gráfico:
$x + 60° + 60° = 180°$
$\therefore x = 60°$

Clave C

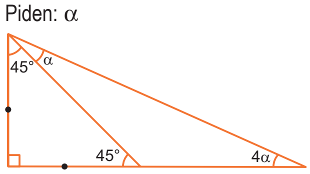
4. Piden: θ



Del gráfico:
$70° + \theta + 60° = 180°$
$\therefore \theta = 50°$

Clave A

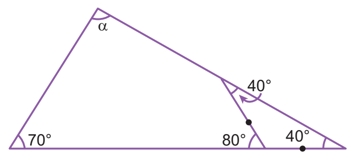
5. Piden: α



Del gráfico:
$\alpha + 4\alpha = 45°$
$5\alpha = 45°$
$\therefore \alpha = 9°$

Clave E

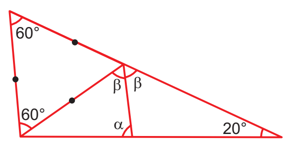
6. Piden: α



Del gráfico:
$70° + \alpha + 40° = 180°$
$\therefore \alpha = 70°$

Clave B

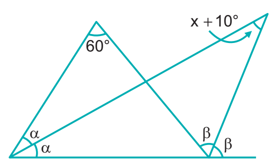
7. Piden: $(\alpha + \beta)$



Del gráfico:
$60° + 60° = 2\beta$
$\Rightarrow \beta = 60°$
$\alpha = \beta + 20°$
$\alpha = 60° + 20°$
$\alpha = 80°$
$\therefore \alpha + \beta = 140°$

Clave A

8. Piden: x

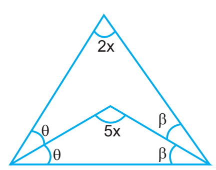


Por propiedad:
$x + 10° = \dfrac{60°}{2} = 30°$

$\therefore x = 20°$

Clave A

9. Piden: x



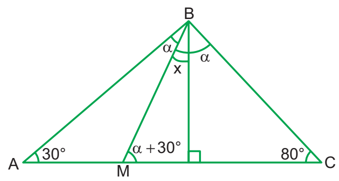
Por propiedad:
$5x = 90° + \dfrac{2x}{2}$

$4x = 90°$
$\therefore x = 22{,}5°$

Clave A

10. Piden: x

Dato: $\overline{BM}$ es bisectriz



Del gráfico:

$2\alpha + 30° + 80° = 180°$

$2\alpha + 110° = 180°$

$\Rightarrow \alpha = 35°$ ...(1)

Además:

$\alpha + 30° + x = 90°$ ...(2)

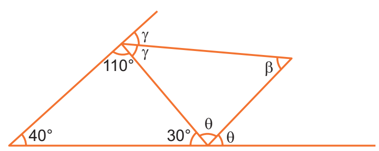
Reemplazando (1) en (2):

$35° + 30° + x = 90°$

$\therefore x = 25°$

Clave C

11. Piden: β



Por propiedad:

$\beta = 90° - \dfrac{40°}{2}$

$\beta = 90° - 20°$

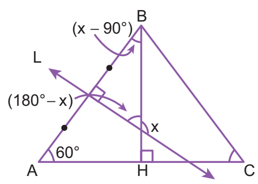
$\therefore \beta = 70°$

Clave B

12. Piden: x

Dato: $\overline{BH}$ es altura

$\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.



Del gráfico:

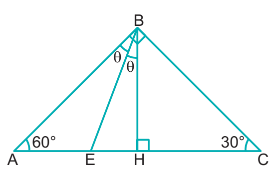
$x - 90° + 60° = 90°$

$\therefore x = 120°$

Clave A

13. Piden: θ

Dato: $\overline{EB}$ es bisectriz



Del gráfico:

$60° + 2\theta = 90°$

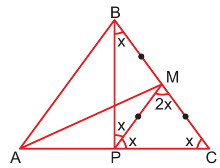
$2\theta = 30°$

$\therefore \theta = 15°$

Clave A

14. Piden: x

Dato: $\overline{AM}$ mediana y PM = MC



Del gráfico:

$2x + x + x = 180°$

$4x = 180°$

$\therefore x = 45°$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

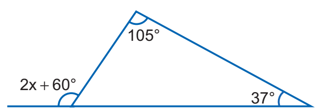
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



Por ángulo exterior:

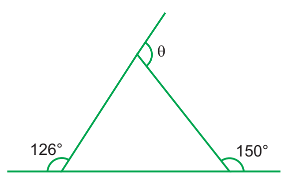
$2x + 60° = 105° + 37°$

$2x = 82°$

$\therefore x = 41°$

Clave A

5.



Por suma de ángulos exteriores:

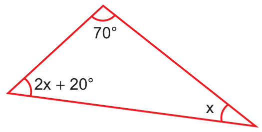
$\theta + 126° + 150° = 360°$

$\theta + 276° = 360°$

$\therefore \theta = 84°$

Clave D

6.



Por suma de ángulos interiores:

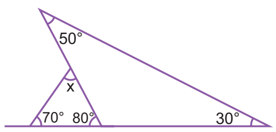
$2x + 20° + x + 70° = 180°$

$3x = 90°$

$\therefore x = 30°$

Clave D

7.



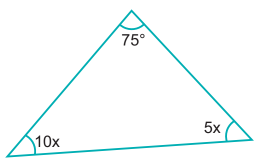
Del gráfico:

$x + 70° + 80° = 180°$

$\therefore x = 30°$

Clave A

8.



Por suma de ángulos interiores:

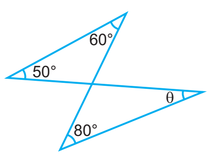
$10x + 5x + 75° = 180°$

$15x = 105°$

$\therefore x = 7°$

Clave C

9.



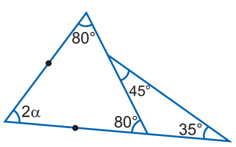
Por propiedad:

$60° + 50° = 80° + \theta$

$\therefore \theta = 30°$

Clave A

10.



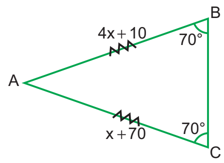
$2\alpha + 160° = 180°$

$2\alpha = 20°$

$\therefore \alpha = 10°$

Clave A

11.



El $\triangle ABC$ es isósceles: $AB = AC$

Entonces:

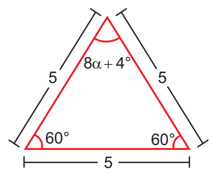
$4x + 10 = x + 70$

$3x = 60$

$\therefore x = 20$

Clave C

12.



Es un triángulo equilátero:

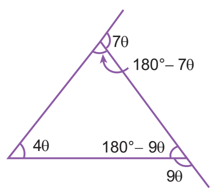
$8\alpha + 4° = 60°$

$8\alpha = 56°$

$\therefore \alpha = 7°$

Clave E

13.



Por suma de ángulos internos:

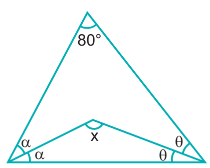
$4\theta + 360° - 16\theta = 180°$

$180° = 12\theta$

$\therefore 15° = \theta$

Clave D

14.



Por propiedad:

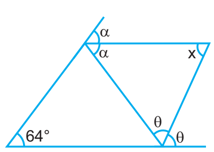
$x = 90° + \dfrac{80°}{2°}$

$x = 90° + 40°$

$\therefore x = 130°$

Clave C

15.



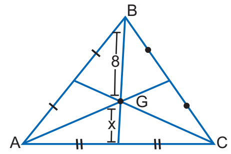
$x = 90° - \dfrac{64°}{2}$

$x = 90° - 32°$

$\therefore x = 58°$

Clave D

16.

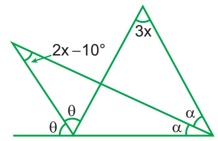


$8 = 2(x)$

$\therefore 4 = x$

Clave C

17.



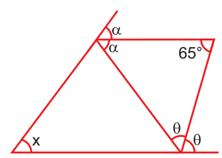
$2x - 10° = \dfrac{3x}{2}$

$4x - 20° = 3x$

$\therefore x = 20°$

Clave C

18.



$65° = 90° - \dfrac{x}{2}$

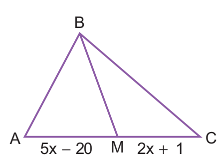
$\dfrac{x}{2} = 25°$

$\therefore x = 50°$

Clave C

Resolución de problemas

19.



Si $\overline{BM}$ es mediana, entonces:

$5x - 20 = 2x + 1$

$3x = 21$

$x = 7$

Luego:

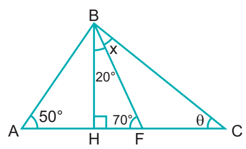
$AC = 7x - 19$

$AC = 49 - 19$

$\therefore AC = 30$

Clave C

20.



Por propiedad:

$20° = \dfrac{50° - \theta}{2}$

$40° = 50° - \theta$

$\theta = 10°$

Luego:

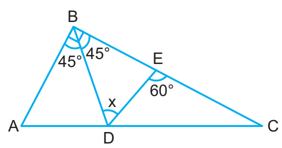
$x = 70° - \theta$

$x = 70° - 10°$

$\therefore x = 60°$

Clave C

21.



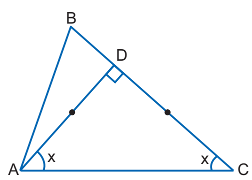
Por ángulo exterior:

$45° + x = 60°$

$\therefore x = 15°$

Clave A

22.



Por suma de ángulos interiores:

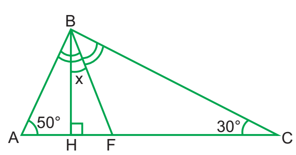
$2x + 90° = 180°$

$2x = 90°$

$\therefore x = 45°$

Clave D

23.



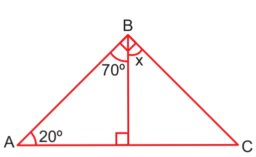
Por propiedad:

$x = \dfrac{50° - 30°}{2}$

$\therefore x = 10°$

Clave A

24.



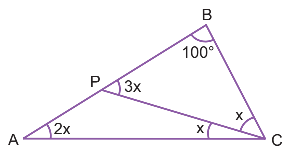
Del gráfico:

$x + 70° = 90°$

$\therefore x = 20°$

Clave C

25.



Del gráfico:

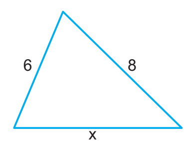
$3x + x + 100° = 180°$

$4x = 80°$

$\therefore x = 20°$

Clave C

26.



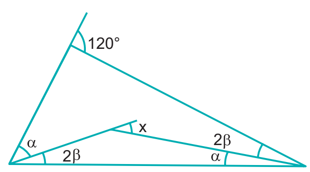
Por el teorema de la existencia:

$2 < x < 14$

$\therefore x = 13$ (mayor valor entero)

Clave B

27.



De la figura:

$x = \alpha + 2\beta$

Por ángulo exterior:

$120° = 2(\alpha + 2\beta) = 2x$

$\Rightarrow x = 60°$

Clave D

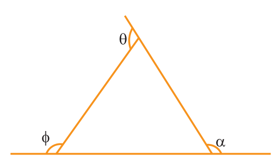
Nivel 2 (página 25) Unidad 1

Comunicación matemática

28.

29.

30.



Dato: $\theta + \alpha = 270°$

$\phi + \underbrace{\theta + \alpha}_{270°} = 360°$

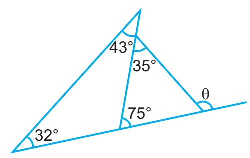
$\Rightarrow \phi = 90°$

$\therefore$ Es un triángulo rectángulo.

Clave A

Razonamiento y demostración

31.



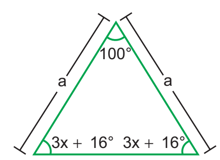
Por ángulo externo:

$\theta = 75° + 35°$

$\therefore \theta = 110°$

Clave E

32.



$6x + 32° + 100° = 180°$

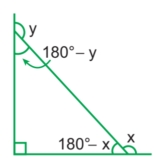
$6x + 132° = 180°$

$6x = 48°$

$\therefore x = 8°$

Clave B

33.



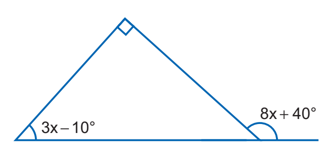
$180° - y + 180° - x = 90°$

$360° - x - y = 90°$

$\therefore 270° = x + y$

Clave E

34.



Por ángulo externo:

$90° + 3x - 10° = 8x + 40°$

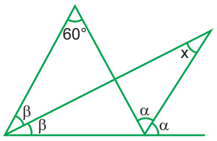
$3x + 80° = 8x + 40°$

$40° = 5x$

$8° = x$

Clave B

35.



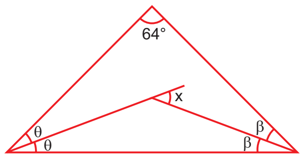
Por propiedad.

$x = \dfrac{60°}{2}$

$x = 30°$

Clave D

36.



$\theta + \beta = x$

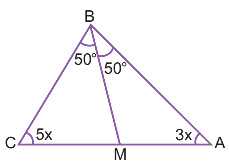
$2(\theta + \beta) + 64° = 180°$

$2x = 116°$

$\therefore\ x = 58°$

Clave A

37.



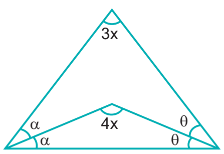
$5x + 3x + 100° = 180°$

$8x = 80°$

$\therefore\ x = 10°$

Clave E

38.



$4x = 90° + \dfrac{3x}{2}$

$4x - 90° = \dfrac{3x}{2}$

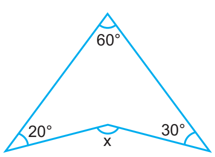
$8x - 180° = 3x$

$5x = 180°$

$\therefore\ x = 36°$

Clave E

39.



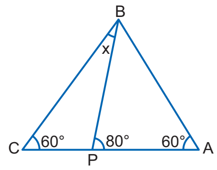
$x = 20° + 30° + 60°$

$\therefore\ x = 110°$

Clave C

Resolución de problemas

40.

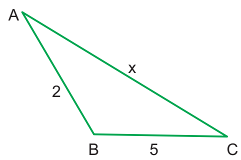


Por dato el $\triangle ABC$ es equilátero, entonces:
$m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$

En el $\triangle CBP$:
$60° + x = 80°$
$\therefore x = 20°$

Clave B

41.



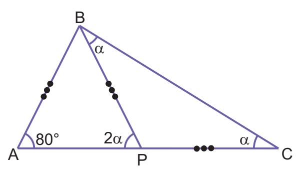
Por dato $m\angle B > 90°$, entonces x es el mayor de los tres lados:
$x > 5$ ...(1)

Por desigualdad triangular:
$x < 5 + 2$
$x < 7$ ...(2)

De (1) y (2): $5 < x < 7$
Piden el valor entero de x.
$\therefore x = 6$

Clave D

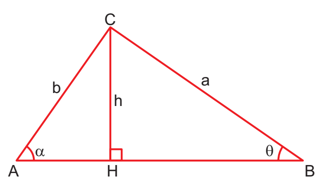
42.



Piden: $m\angle BCA = \alpha$
En el $\triangle ABP$ isósceles, se cumple:
$2\alpha = 80°$
$\therefore\ \alpha = 40°$

Clave B

43.



Por dato: $a + b = 36$
En el ⊿AHC: $\alpha < 90°$

Entonces por correspondencia triangular:
$h < b$ ...(1)

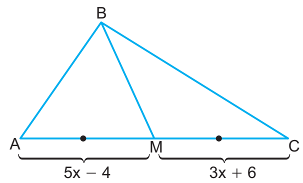
En el ⊿CHB: $\theta < 90°$
Entonces por correspondencia triangular:
$h < a$ ...(2)

Sumando (1) y (2):
$2h < a + b$
$2h < 36 \Rightarrow h < 18$

Por lo tanto, el mayor valor entero de h es 17.

Clave C

44.

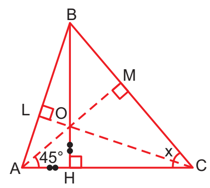


Del gráfico:
$5x - 4 = 3x + 6$
$2x = 10$
$\Rightarrow x = 5$

Piden:
$AC = (5x - 4) + (3x + 6) = 8x + 2$
$AC = 8(5) + 2$
$\therefore AC = 42$

Clave E

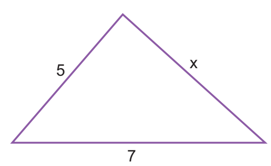
45.



Del gráfico, O es el ortocentro del $\triangle ABC$, entonces: $\overline{AM} \perp \overline{BC}$.
El ⊿AHO resulta ser notable de 45°.
En el ⊿AMC:
$45° + x = 90°$
$\therefore x = 45°$

Clave A

46.



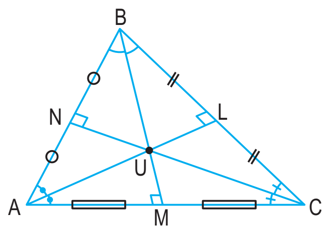
$7 - 5 < x < 7 + 5$
$2 < x < 12 \Rightarrow x = \{3; 4; 5; 6; ...; 10; 11\}$
$\therefore \sum_{\text{valores}} = 63$

Clave D

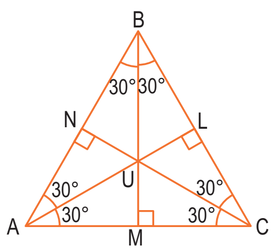
Nivel 3 (página 27) Unidad 1

Comunicación matemática

47. Para que coincidan los cuatro puntos notables (G; O; H e I), entonces también deben coincidir las líneas notables (mediana, mediatriz, altura y bisectriz), graficamos un triángulo:

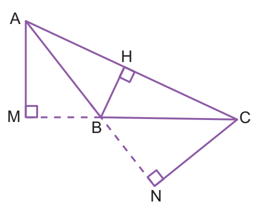


$\overline{AL}$; $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son medianas y alturas, entonces también son mediatrices y por lo tanto bisectrices. Para que esto ocurra los lados del △ABC son iguales (AB = BC = AC), por lo tanto △ABC tiene que ser un triángulo equilátero.
Graficamos:



Gráficamente vemos que U es baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro.

48.

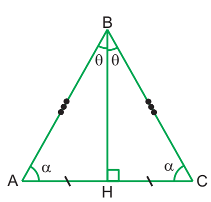


El △ABC es obtusángulo (m∠B > 90°).
$\overline{BH}$: altura interior al triángulo ABC.
$\overline{AM}$ y $\overline{CN}$: alturas exteriores al triángulo ABC.

Por lo tanto, tiene dos alturas exteriores.

Clave A

49.



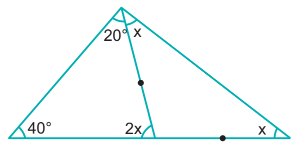
El △ABC es isósceles ($\overline{AC}$: base)

$\overline{BH}$ $\begin{cases} \text{– Mediana} \\ \text{– Bisectriz interior} \\ \text{– Mediatriz de la base} \end{cases}$

Clave E

Razonamiento y demostración

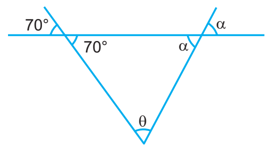
50. Piden: x



Del gráfico:
$40° + 20° + 2x = 180°$
$2x = 120°$
$\therefore x = 60°$

Clave E

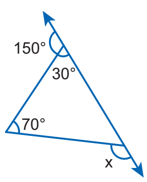
51. Piden: $\alpha + \theta$



Del gráfico:
$70° + \alpha + \theta = 180°$
$\therefore \alpha + \theta = 110°$

Clave D

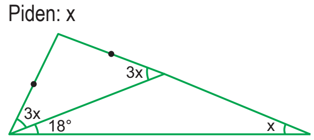
52. Piden: x



Del gráfico:
$70° + 30° = x$
$\therefore\ x = 100°$

Clave C

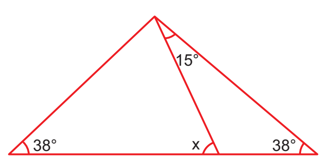
53. Piden: x



Del gráfico:
$18° + x = 3x$
$18° = 2x$
$\therefore x = 9°$

Clave E

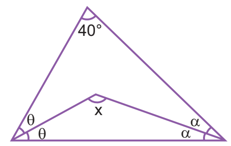
54. Piden: x



Del gráfico:
$x = 15° + 38°$
$\therefore\ x = 53°$

Clave B

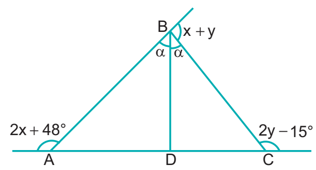
55. Piden: x



Por propiedad:
$x = 90° + \dfrac{40°}{2}$
$\therefore x = 110°$

Clave B

56. Piden: m∠DBC = α



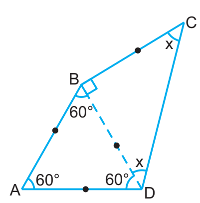
Del gráfico:
$2x + 48° + x + y + 2y - 15° = 360°$
$3(x + y) + 33° = 360°$
$3(x + y) = 327°$
$(x + y) = 109°$ ...(1)

También:
$2\alpha + x + y = 180°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$2\alpha = 71°$
$\therefore \alpha = 35{,}5°$

Clave E

57.

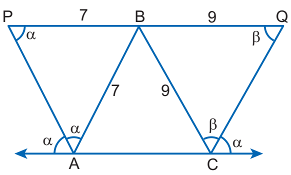


Trazamos $\overline{BD}$.
⇒ ΔABD es equilátero.

En el ⊿ DBC:
$2x = 90°$
$x = 45°$

Clave B

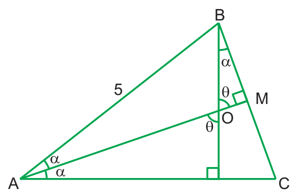
58.



$\triangle ABP$ es isósceles: $PB = 7$
$\triangle BCQ$ es isósceles: $BQ = 9$
$\Rightarrow PQ = 16$

Clave C

59.



Trazamos la bisectriz AM, vemos que $m\angle AMB = 90°$.

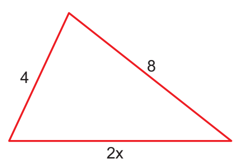
$\overline{AM}$ es bisectriz y altura, entonces el $\triangle ABC$ es isósceles:

$\therefore AC = AB = 5$

Clave D

Resolución de problemas

60.



Por desigualdad triangular:

$8 - 4 < 2x < 8 + 4$

$4 < 2x < 12$

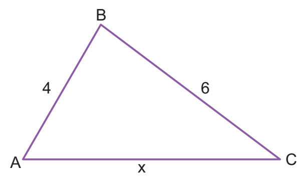
$2 < x < 6$

Valores enteros de $x = \{3; 4; 5\}$

Por lo tanto, el máximo valor entero de x es 5.

Clave D

61.

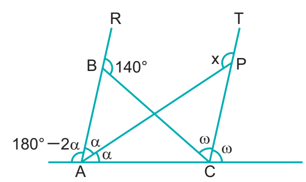


Por desigualdad triangular:
$6 - 4 < x < 6 + 4$
$2 < x < 10$

Valores enteros de x: $\{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
Por lo tanto, son 7 valores enteros.

Clave C

62.

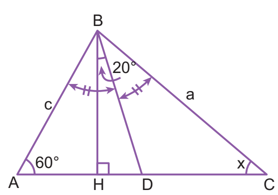


Por suma de ángulos externos, en el $\triangle ABC$:
$180° - 2\alpha + 140° + 2\omega = 360°$
$\Rightarrow \omega - \alpha = 20°$

Por suma de ángulos externos, en el $\triangle APC$:
$180° - \alpha + x + \omega = 360°$
$x + (\omega - \alpha) = 180°$
$x + (20°) = 180°$
$\therefore x = 160°$

Clave E

63.



Por dato: $c < a$
Entonces por correspondencia triangular: $x < 60°$

Por propiedad:

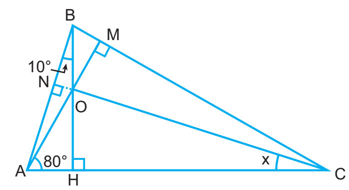
$20° = \dfrac{60° - x}{2}$

$40° = 60° - x$

$\therefore x = 20°$

Clave C

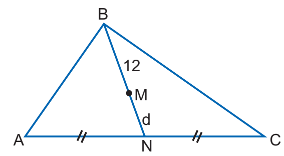
64.



Del gráfico: O es el ortocentro del $\triangle ABC$
En el ⊿ANC:
$x + 80° = 90°$
$\therefore x = 10°$

Clave A

65.

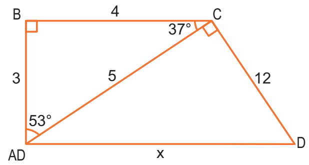


Por dato: M es el baricentro del $\triangle ABC$
$\Rightarrow BM = 2(MN)$
$12 = 2(d)$
$d = 6$
Piden:
$MN + BN = d + (12 + d) = 12 + 2(6)$
$\therefore MN + BN = 24.$

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 29) Unidad 1

1. Piden: x



En el ⊿ACD aplicamos el teorema dePitágoras.

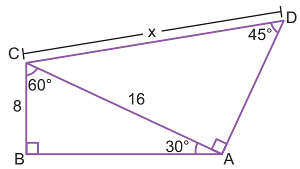
$\Rightarrow (5)^2 + (12)^2 = x^2$

$25 + 144 = x^2$

$\sqrt{169} = x \Rightarrow x = 13$

Clave D

2. Piden: x



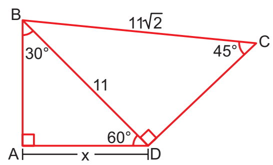
El ⊿CAD es notable de 45°.

$\therefore\ x = 16\sqrt{2}$

Clave A

3. Piden: AD = x

Datos: BC = $11\sqrt{2}$



Como el ⊿BAD es notable (30° y 60°):

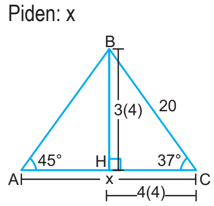
$\Rightarrow 11 = 2x$

$\frac{11}{2} = x$

$\therefore x = 5{,}5$

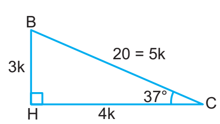
Clave E

4. Piden: x



Trazamos altura BH.

En el triángulo BHC:



$\Rightarrow k = 4$

En el ⊿AHB:

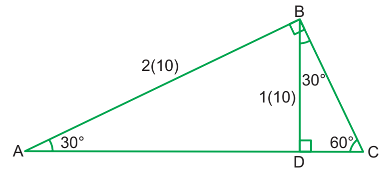
AH = 12

$\therefore x = AH + HC = 12 + 16 = 28$

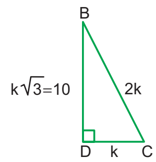
Clave A

5. Piden: DC

Dato: AB = 20



En ⊿BDC:



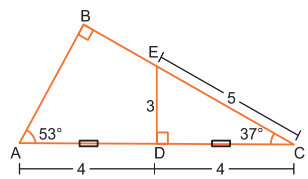
$10 = k\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt{3}} = k$

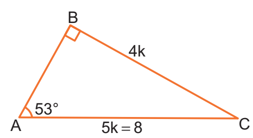
$\therefore DC = \frac{10}{\sqrt{3}}$

Clave E

6. Piden: BE



En el ⊿ABC se cumple:



$\Rightarrow k = \frac{8}{5}$

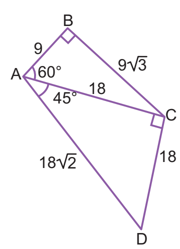
$\Rightarrow BC = 4k = 4\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{32}{5}$

$\therefore BE = \frac{32}{5} - 5 = \frac{7}{5}$

Clave A

7. Piden: AD

Dato: AB = 9

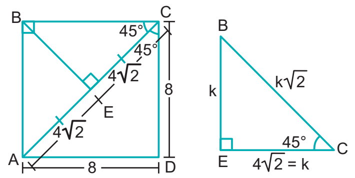


$\therefore AD = 18\sqrt{2}$

Clave C

8. Piden: BE

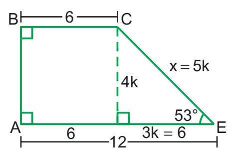
Dato: ABCD es un cuadrado



$\therefore$ BE = k = $4\sqrt{2}$

Clave C

9. Piden: CE = x



$3k = 6 \Rightarrow k = 2$

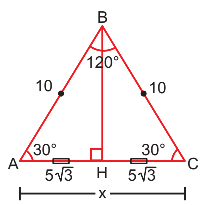
$x = 5k = 5(2)$

$\therefore x = 10$

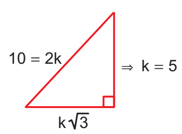
Clave A

10. Piden: x

Dato: AB = BC = 10



En el $\triangle$ABC, $\overline{BH}$ es bisectriz y mediana por ser este un triángulo isósceles.



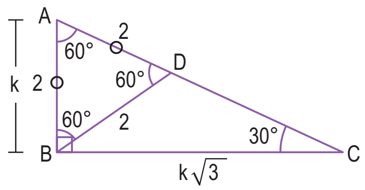
Como: x = AH + HC

$x = 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

$\therefore x = 10\sqrt{3}$

Clave A

11. El triángulo ABC es notable de 30° y 60° entonces:



$\Rightarrow$ El $\triangle$ABD es equilátero.

$\therefore$ BD = AB = AD = 2

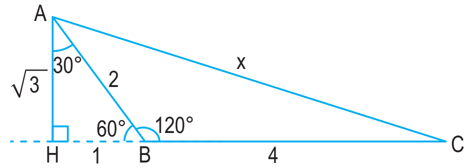
AB = k = 2

Luego: BC = $k\sqrt{3}$

$\therefore x = 2\sqrt{3}$

Clave E

12. Trazamos la altura AH.



El $\triangle$AHB es notable de 30° y 60°:

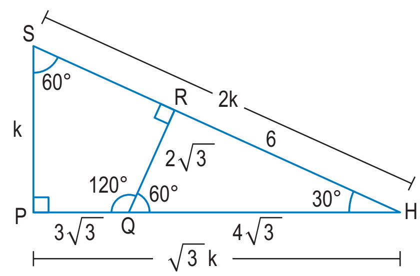
$\Rightarrow$ Si AB = 2 $\Rightarrow$ AH = $\sqrt{3}$ y HB = 1

Luego usamos el teorema de Pitágoras en el ⊿AHC:

$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (1 + 4)^2 \Rightarrow x^2 = 28 \quad \therefore x = 2\sqrt{7}$

Clave C

13. Prolongamos los lados SR y PQ que se intersecan en el punto H.



En el ⊿ QRH:

Si RQ = $2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ QH = $4\sqrt{3}$

Además: RH = $2\sqrt{3}\,\sqrt{3}$

RH = 6

Luego: PH = $\sqrt{3}$ k = $7\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ k = 7; reemplazamos:

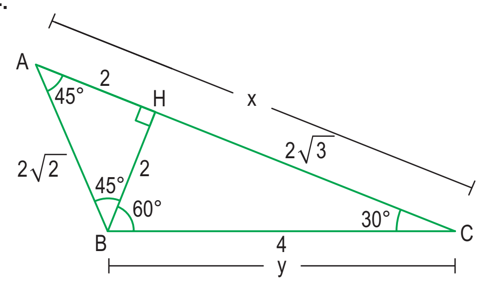
SR = 2k – 6

SR = 2(7) – 6 $\Rightarrow$ SR = 8 y SP = 7

Sumando: SR + SP = 8 + 7 = 15

Clave A

14.



Trazamos $\overline{BH}$ y hallamos que ⊿ AHB y ⊿ BHC son triángulos notables de 30° y 45° respectivamente.

$\therefore x = 2 + 2\sqrt{3}$; y = 4

$\Rightarrow x + y = 6 + 2\sqrt{3}$

Clave C

Nivel 1 (página 31) Unidad 1

Comunicación matemática

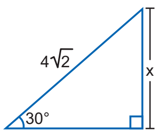
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



Por triángulo notable de 30° y 60° sabemos:

$2k = 4\sqrt{2}$

$k = 2\sqrt{2}$

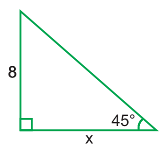
Piden x:

$x = k$

$\therefore\ x = 2\sqrt{2}$

Clave C

5.



Por triángulo notable de 45°:

$K = 8$

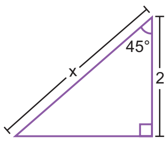
Piden x:

$x = k$

$\therefore\ x = 8$

Clave E

6.



Por triángulo notable de 45°:

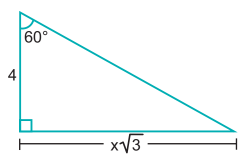
$k = 2$

Piden x:

$x = k\sqrt{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

Clave C

7.



Por triángulo notable:

$k = 4$

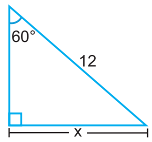
Piden x:

$x\sqrt{3} = k\sqrt{3} \Rightarrow x = k$

$\therefore\ x = 4$

Clave E

8.



Por triángulo notable de 30° y 60°:

$2k = 12$

$k = 6$

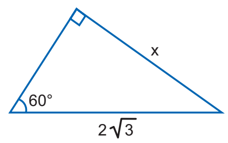
Piden x:

$x = k\sqrt{3}$

$\therefore\ x = 6\sqrt{3}$

Clave D

9.



Por triángulo notable de 30° y 60°:

$2k = 2\sqrt{3}$

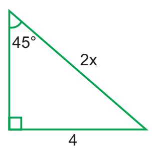
$k = \sqrt{3}$

$\Rightarrow x = k\sqrt{3}$

$\therefore x = 3$

Clave D

10.



Por triángulo notable de 45°:

$k = 4$

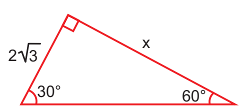
Piden x:

$2x = 4\sqrt{2}$

$\therefore x = 2\sqrt{2}$

Clave E

11.



Por triángulo notable de 30° y 60°:

$k\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$k = 2$

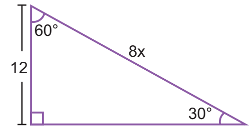
Piden x:

$x = k$

$\therefore\ x = 2$

Clave A

12.



Por triángulo notable:

$k = 12$

Piden x:

$8x = 2k$

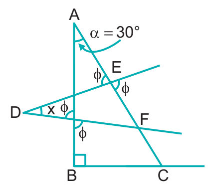
$8x = 2(12)$

$\therefore\ x = 3$

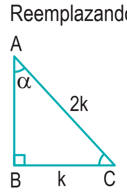
Clave C

Resolución de problemas

13. Piden: x



Reemplazando el dato: AC = 2BC



$\Rightarrow \alpha = 30°$

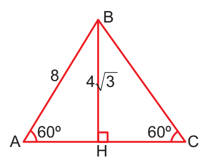
Del gráfico:

$x + \phi = 30° + \phi$

$\therefore x = 30°$

Clave C

14.



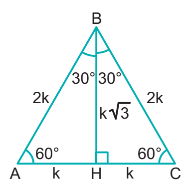
Del gráfico:

$AB = \left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)2 = 8$

$2p_{\triangle ABC} = 8 + 8 + 8 = 24$ cm

Clave C

15.



Por dato:

$BH = 3 \Rightarrow k\sqrt{3} = 3$

$\Rightarrow k = \sqrt{3}$

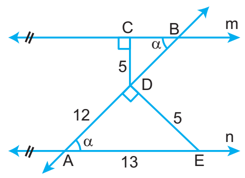
Piden:

Perímetro $\triangle ABC = 6k = 6(\sqrt{3})$

$\therefore$ Perímetro $\triangle ABC = 6\sqrt{3}$

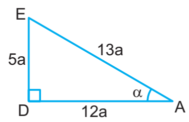
Clave B

16.



Por el teorema de Pitágoras: AD = 12

Del ◺ ADE, obtenemos la relación entre los catetos:



Entonces para el ◺ DCB los catetos deben estar en la misma relación.

$\Rightarrow 5 = 5a$

$\Rightarrow a = 1$

Luego:

$DB = 13a = 13(1) \Rightarrow DB = 13$

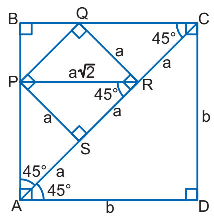
Piden:

$AB = AD + DB = 12 + 13$

$\therefore AB = 25$

Clave B

17.



Sea: PS = a

En el ◺ADC: $AC = b\sqrt{2}$

Entonces: $3a = b\sqrt{2} \Rightarrow b = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

Piden: $\dfrac{PR}{CD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{b} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{PR}{CD} = \dfrac{2}{3}$

Clave E

Nivel 2 (página 32) Unidad 1

Comunicación matemática

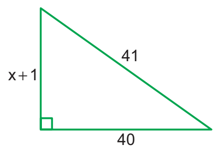
18.

19.

20.

Razonamiento y demostración

21. Piden: $x^2 + 7$



Por Pitágoras:

$(x + 1)^2 + 40^2 = 41^2$

$x^2 + 2x + 1 - 81 = 0$

$x^2 + 2x - 80 = 0$

x −8

x +10

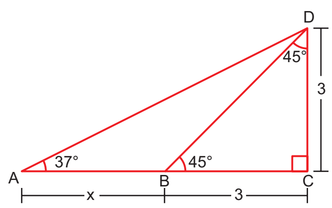
$\Rightarrow x = 8 \ \wedge \ x = -10$ (no cumple)

$\therefore x^2 + 7 = 8^2 + 7 = 71$

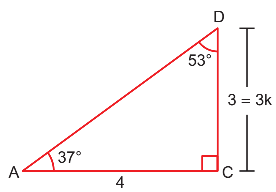
Clave D

22. Piden: AB = x

Dato: CD = 3



En el triángulo:

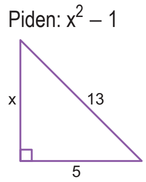


$\Rightarrow k = 1$

$\therefore x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$

Clave E

23. Piden: $x^2 - 1$



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$\Rightarrow x^2 + 25 = 169$

$x^2 = 144$

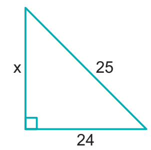
$\sqrt{x^2} = \sqrt{144}$

$x = 12$

$\therefore x^2 - 1 = 144 - 1 = 143$

Clave C

24. Piden: x + 1



Por Pitágoras:

$x^2 + 24^2 = 25^2$

$x^2 = 25^2 - 24^2$

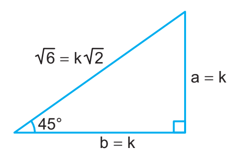
$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$

$x = 7$

$\therefore x + 1 = 7 + 1 = 8$

Clave B

25. Piden: ab



$\Rightarrow$ como: $\sqrt{6} = k\sqrt{2}$

$k = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

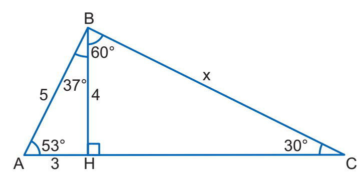
$\therefore a = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \ \wedge \ b = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$\therefore ab = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{6}{2} = 3$

Clave C

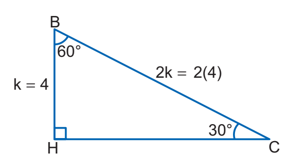
26. Piden: BC = x

Dato: AB = 5



Se traza la altura BH.

En el triángulo:

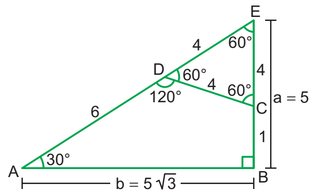


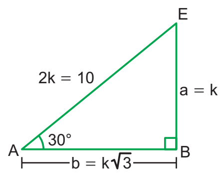
$\therefore BC = x = 2(4) = 8$

Clave B

Resolución de problemas

27.





De donde: $k = 5$

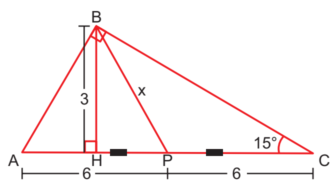
$a = 5 \ \wedge b = 5\sqrt{3}$

$\therefore$ Perímetro del cuadrilátero ABCD es:

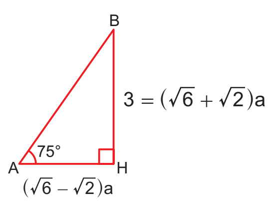
$6 + 4 + 1 + 5\sqrt{3} = 11 + 5\sqrt{3}$

Clave D

28. Piden: longitud de la mediana relativa a la hipotenusa.



En el triángulo:



$\Rightarrow a = \dfrac{3}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$

Luego:

$AH = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \left(\dfrac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow AH = 6 - 3\sqrt{3}$

Como:

$AP = AH + HP$

$\Rightarrow 6 = 6 - 3\sqrt{3} + HP$

$HP = 3\sqrt{3}$

Por Pitágoras:

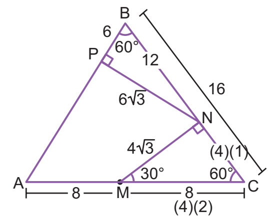
$x^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36$

$\therefore \ x = 6$ m

Clave C

29. Piden: MN + NP

Datos: el $\triangle$ABC es equilátero



Del gráfico:

$MN + NP = 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

Clave D

Nivel 3 (página 33) Unidad 1

Comunicación matemática

30. Hallamos el área del trapecio; que además está compuesto por 3 triángulos rectángulos.

$A_{\square ABCD} = A_{\triangle BAE} + A_{\triangle BEC} + A_{\triangle EDC}$

$$\frac{1}{2}(a + b)(b + a) = \frac{1}{2}(b)(a) + \frac{1}{2}(c)(c) + \frac{1}{2}(a)(b)$$

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2$$

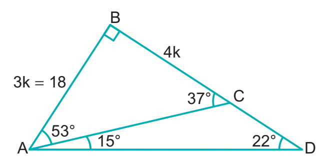
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \ \Rightarrow \ a^2 + b^2 = c^2$$

31.

32.

Razonamiento y demostración

33. Piden: BC



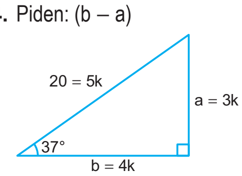
$3k = 18 \Rightarrow k = 6$

$BC = 4k = 4(6)$

$\therefore$ BC = 24

Clave B

34. Piden: (b – a)



Se observa:

$20 = 5k \Rightarrow k = 4$

Luego:

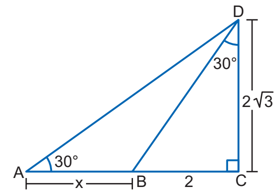
$a = 3k = 3(4) = 12$

$b = 4k = 4(4) = 16$

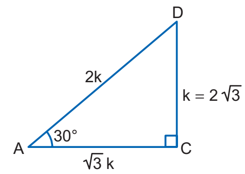
$\therefore b - a = 16 - 12 = 4$

Clave D

35. Piden: (AB)(BC)



En el triángulo:



$AC = (2\sqrt{3})\sqrt{3} = AC = 6$

Del gráfico:

$AC = x + 2 = 6$

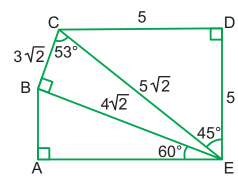
$\Rightarrow x = 4$

$\therefore$ (AB)(BC) = (4)(2) = 8 m^2

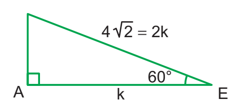
Clave B

36. Piden: AE

Dato: DE = 5



En el triángulo:



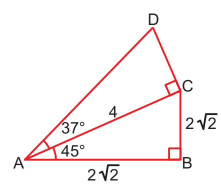
$\Rightarrow k = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ AE = k = $2\sqrt{2}$ m

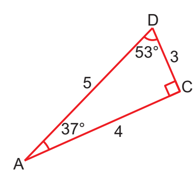
Clave A

37. Piden: AD

Dato: AB = $2\sqrt{2}$



En el triángulo por ser notable se cumple:

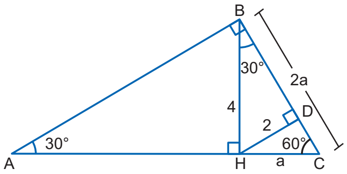


$\therefore$ AD = 5

Clave C

Resolución de problemas

38.



Por dato: BC = 2HC

Entonces el ◺BHC resulta notable de 30° y 60°.

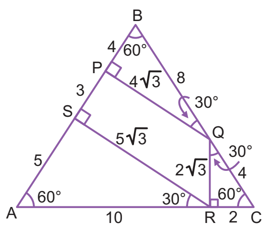
Luego, en el ◺AHB:

AB= 2(BH) = 2(4)

$\therefore$ AB= 8

Clave C

39.



Por dato: el $\triangle$ABC es equilátero.

Empleando el ◺ notable de 30° y 60° se calcula la longitud de cada segmento.

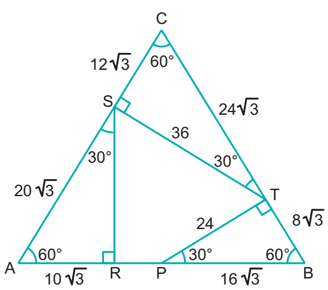
Piden el perímetro de PQRS (2p):

$\Rightarrow 2p = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 3$

$\therefore 2p = 11\sqrt{3} + 3$

Clave E

40.



Por dato, el $\triangle$ABC es equilátero y su lado mide $32\sqrt{3}$.

Empleando el ◺ notable de 30° y 60° se calcula la longitud de cada segmento.

Piden:

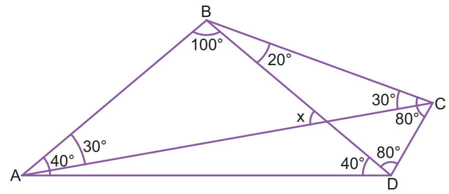
$SR = (AR)\sqrt{3} = (10\sqrt{3})\sqrt{3} = 30$

$\therefore$ SR = 30

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 35) Unidad 1

1. En el $\triangle$DBC: $20° + 80° + m\angle BCD = 180° \Rightarrow m\angle BCD = 80°$



Luego en el $\triangle$ABC: $m\angle BAD + 40° + 100° = 180° \Rightarrow m\angle BAD = 40°$; por lo tanto, los triángulos ABD y BDC son isósceles.

$\Rightarrow$ AB = BD = BC; luego se deduce que el $\triangle$ABC es isósceles.

$\therefore$ En el $\triangle$ABC: $m\angle BAC + m\angle ACB + 120° = 180°$

Pero $m\angle BAC = m\angle ACB$; reemplazando:

$2m\angle BAC = 180° - 120°$

$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ACB = 30°$

Finalmente $x = m\angle BCA + m\angle CBD$ Reemplazando:

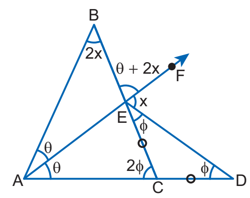
$30° + 20° = x \Rightarrow x = 50°$

Clave E

2. Asignamos el valor ϕ para el $\angle$EDC; pero como EC = CD

$\Rightarrow$ El $\triangle$ECD es isósceles.

$\Rightarrow m\angle EDC = m\angle DEC = \phi$ por ángulo externo $m\angle BCA = 2\phi$



También por ángulo externo: $m\angle BEF = \theta + 2x$; pero $m\angle BEC = 180°$

Luego sumamos: $\theta + 2x + x + \phi = 180° \Rightarrow \theta + 3x + \phi = 180°$ ... (I)

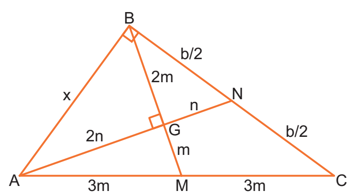
Luego, en el $\triangle$ABC: $2\theta + 2x + 2\phi = 180° \Rightarrow \theta + x + \phi = 90°$ ... (II)

Restamos las ecuaciones (I) – (II): $2x = 90° \Rightarrow x = 45°$

Clave D

3. Sabemos que el baricentro (G) divide a las medianas en segmentos que están en la relación de 2 a 1; por lo tanto asignamos 2m = BG y 2n = AG, luego sabemos que la hipotenusa es igual al doble de la mediana relativa a esta.

$\Rightarrow$ AM = MC = 3m



En el ◺AGM: $(3m)^2 = (2n)^2 + m^2 \Rightarrow 2m^2 = n^2$ ... (I)

En el ◺BGN: $(b/2)^2 = (2m)^2 + n^2 \Rightarrow b^2 = 24\,m^2$ ... (II)

En el ◺ABG: $x^2 = (2n)^2 + (2m)^2 \Rightarrow x^2 = 4n^2 + 4m^2$ ... (III)

Reemplazando (I) y (II) en (III):

$x^2 = 4(2m^2) + 4m^2$

$x^2 = 12m^2$; pero $12m^2 = \dfrac{b^2}{2}$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{b^2}{2}$

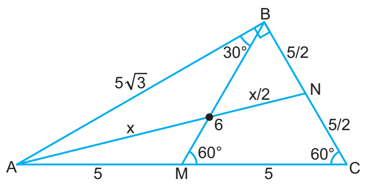
$\therefore x = b\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Clave E

4. Si BM = 5 cm $\Rightarrow$ AM = MC = 5; luego el $\triangle$ABC es notable de 30° y 60° dado que:

30° + m$\angle$BAM = 60° ($\triangle$ABM es isósceles), por lo tanto si AC = 10

$\Rightarrow$ AB = $5\sqrt{3}$ y BC = 5



En el $\triangle$ABN: AG = x; pero como G es baricentro GN = x/2, por el teorema de Pitágoras:

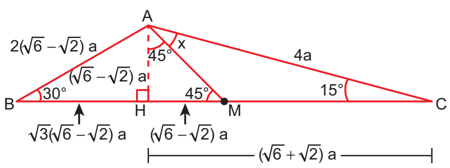
$(x + x/2)^2 = (5\sqrt{3})^2 + (5/2)^2$

$$\therefore\ \frac{9x^2}{4} = 25 \times 3 + \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{9}{4}x^2 = 25\left(\frac{12}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{9}{4}x^2 = 25\left(\frac{13}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{5}{3}(\sqrt{13})$$

Clave D

5. Trazamos la altura AH para determinar los triángulos notables AHB y AHC; luego como el $\triangle$AHC es notable:



Si AC = 4a $\Rightarrow$ AH = $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$a y HC = $(\sqrt{6} + \sqrt{2})$a.

Pero el $\triangle$AHB es notable de 30° y 60°; si AH = $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$a

$\Rightarrow$ AB = $2a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ y BH = $\sqrt{3}\,a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Pero del dato BM = MC ($\overline{AM}$ es mediana):

MC = $\frac{1}{2}[a\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} + \sqrt{2})a] \Rightarrow$ MC = $2a\sqrt{2}$ = BM

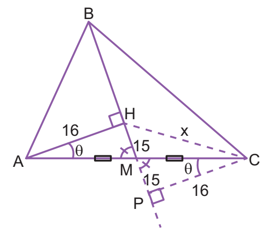
$\therefore$ HM = BM – BH ; reemplazando: HM = $2a\sqrt{2} - \sqrt{3}\,a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

HM = $a(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow$ HM = AH $\Rightarrow$ $\triangle$AHM es isósceles y notable de 45°.

$\Rightarrow$ x + 15° = 45° $\therefore$ x = 30°

Clave B

6. Prolongamos $\overline{BM}$ hasta P de tal manera que $\overline{CP} \perp \overline{BP}$.



Luego como: $\overline{AH} \perp \overline{BH} \Rightarrow \overline{AH} \,//\, \overline{PC}$

$\Rightarrow$ m$\angle$HAM = m$\angle$MCP = θ

$\therefore$ ΔAHM $\cong$ ΔCPM (caso ALA)

$\Rightarrow$ HM = MP = 15

Luego, en el $\triangle$HPC aplicamos el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 30^2 + 16^2$

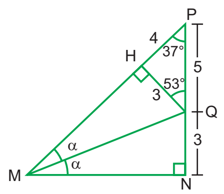
$x^2 = 1156$

$\therefore$ x = 34

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 38) Unidad 2

1. De la figura:



Por el teorema de la bisectriz

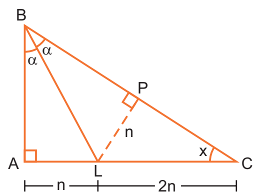
HQ = QN = 3

Luego el ⊿MNP es notable de 37° y 53°.

∴ Si PN = 8 ⇒ MN = 6

Clave C

2. Se traza $\overline{LP} \perp \overline{BC}$.



El ⊿LPC es rectángulo de 30° y 60°.

∴ x = 30°

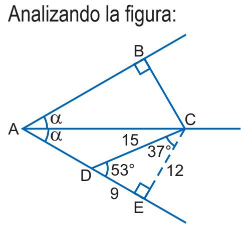
Clave B

3. De los triángulos congruentes:

x = 9; y = 7 ⇒ x + y = 16

Clave E

4. Analizando la figura:

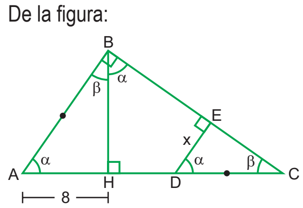


Por propiedad:

BC = CE ⇒ BC = 12

Clave A

5. De la figura:

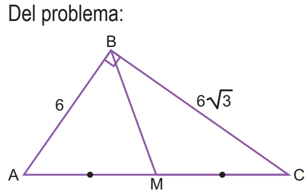


Notamos que: ΔAHB ≅ ΔDEC (Caso ALA)

⇒ AH = DE ⇒ x = 8

Clave B

6. Del problema:

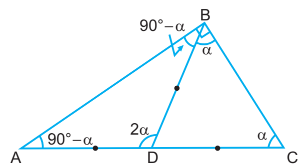


Se deduce: AC = 12

Pero: $BM = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow BM = 6$

Clave D

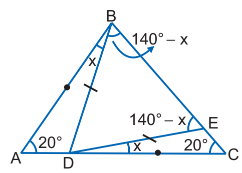
7. Por propiedad:



$BD = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow BD = \dfrac{10}{2} = 5$

Clave A

8.



El ΔABD ≅ ΔCDE (Caso LAL).

En el ΔDEC, por ángulo exterior:

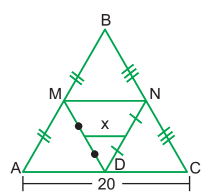
x + 20° = 140° − x

2x = 120°

∴ x = 60°

Clave B

9.



$\overline{MN}$ es base media del ΔABC:

⇒ MN = 10

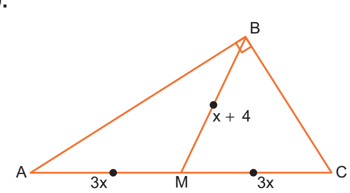
Luego: x es base media del ΔMND

$\Rightarrow x = \dfrac{10}{2} = 5$

∴ x = 5

Clave E

10.



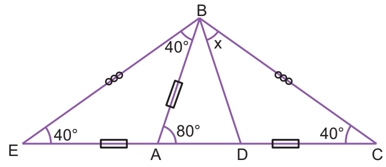
$\overline{BM}$ es la mediana relativa a la hipotenusa:

x + 4 = 3x

∴ x = 2

Clave A

11.



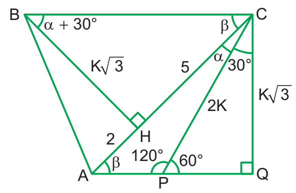
Prolongamos $\overline{AC}$, tal que: AB = EA

El $\Delta CBD \cong \Delta EBA$ (Caso LAL).

$\Rightarrow x = 40°$

Clave B

12. Trazamos $\overline{CQ}$, perpendicular a la prolongación de $\overline{AP}$.



Vemos que el ΔPCQ es un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°

si $PC = 2K \Rightarrow CQ = K\sqrt{3}$

Luego, del dato: $PC = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}BH \Rightarrow$ si $PC = 2K = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}BH \Rightarrow BH = K\sqrt{3}$

Como $\overline{BC} \parallel \overline{AP} \Rightarrow \beta + \alpha = 60°$

En el $\triangle BHC$: $m\angle CBH = 90° - \beta$, pero $\beta = 60° - \alpha$

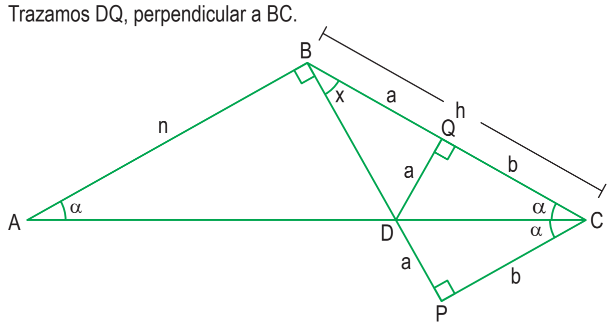
Reemplazando: $m\angle CBH = \alpha + 30°$

$\therefore \Delta BHC \cong \Delta CQA$; (caso ALA) $\Rightarrow BC = AC$

$BC = AH + HC \Rightarrow BC = 2 + 5 \Rightarrow BC = 7$

Clave C

13. Trazamos $\overline{DQ}$, perpendicular a $\overline{BC}$.



Como $\overline{AB} \parallel \overline{PC} \Rightarrow m\angle ACP = m\angle BCA = \alpha$ (ΔABC isósceles)

$\overline{AC}$ es bisectriz del $\angle BCP$:

$\Rightarrow DQ = DP = a$ y $QC = PC = b$

Dato: AB = DP + CP, reemplazando: h = a + b

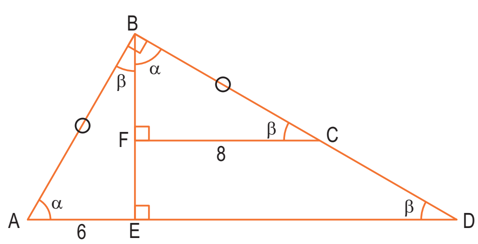
Pero AB = BC = h, del gráfico BC = BQ + QC

Reemplazando: $h = BQ + b \Rightarrow BQ = a$

Luego el ΔBQD es isósceles $\Rightarrow x = 45°$

Clave A

14.



Como: $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow m\angle ABE = \beta$ y $m\angle FBC = \alpha$

Luego: $\triangle AEB \cong \triangle BFC$ caso: ALA, pues $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

AE = BF = 6 y BE = FC = 8 $\Rightarrow$ BF + FE = BE

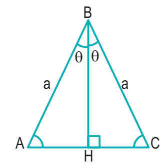
Reemplazando: 6 + FE = 8 $\Rightarrow$ FE = 2

Clave C

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 40) Unidad 2

Comunicación matemática

1.



$\triangle ABH \cong \triangle CBH$ (Caso ALA)

Por lo tanto, $\overline{BH}$ divide al triángulo isósceles en dos triángulos congruentes.

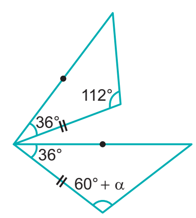
Clave D

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.

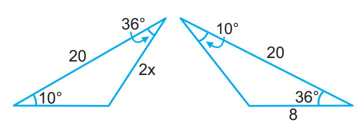


$60° + \alpha = 112°$

$\therefore \alpha = 52°$

Clave C

5.

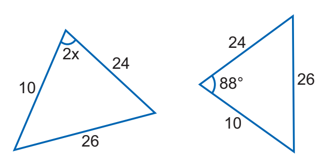


$2x = 8$

$\therefore x = 4$

Clave C

6.

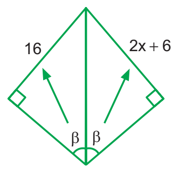


$2x = 88°$

$\therefore x = 44°$

Clave D

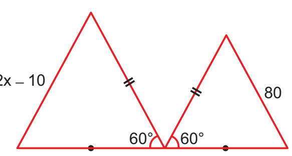
7.



$16 = 2x + 6$
$10 = 2x$
$\therefore 5 = x$

Clave B

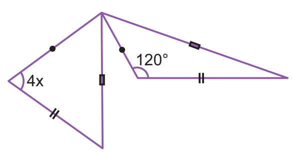
8.



$2x - 10 = 80$
$2x = 90$
$\therefore x = 45$

Clave B

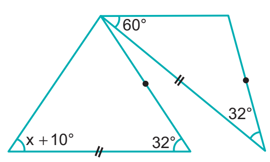
9.



$120° = 4x$
$\therefore 30° = x$

Clave D

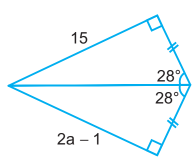
10.



$x + 10° = 60°$
$\therefore x = 50°$

Clave C

11.

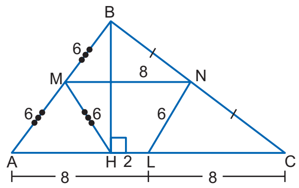


$2a - 1 = 15$
$2a = 16 \Rightarrow a = 8$

Clave C

Resolución de problemas

12.



Por el teorema de los puntos medios:

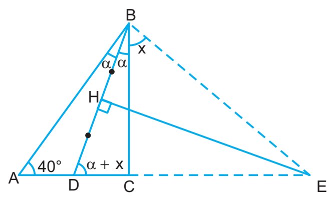
$NL = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

$MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

$\overline{MH}$: mediana relativa a la hipotenusa.
$\Rightarrow MH = AM = MB = 6$
Piden:
$2_{\square PMNLH} = 6 + 8 + 6 + 2$
$\therefore 2_{\square PMNLH} = 22$

Clave B

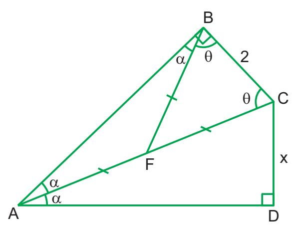
13.



Por dato: $\overline{EH}$ es mediatriz de $\overline{BD}$.
Entonces: $m\angle EBH = m\angle EDH = \alpha + x$
En el $\triangle ABD$:
$40° + \alpha = \alpha + x$
$\therefore x = 40°$

Clave C

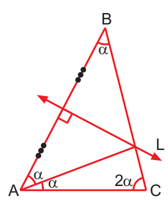
14.



En el $\triangle ABC$: $2\alpha + 2\theta = 180°$
$\alpha + \theta = 90°$
Por el teorema de la bisectriz:
$CD = BC$
$\therefore x = 2$

Clave C

15.



Piden: $m\angle ABC = \alpha$
Por dato el $\triangle ABC$ es isósceles, entonces:
$m\angle BAC = m\angle BCA = 2\alpha$
Además, $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.
Del gráfico:
$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$
$5\alpha = 180°$
$\therefore \alpha = 36°$

Clave D

Nivel 2 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

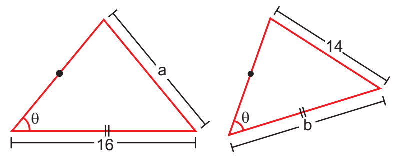
16.

17.

18.

Razonamiento y demostración

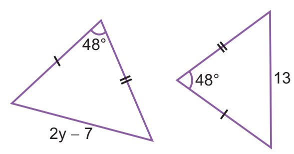
19.



$a = 14$; $b = 16$
$\Rightarrow a + b = 16 + 14 = 30$

Clave B

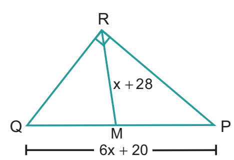
20.



$2y - 7 = 13$
$2y = 20$
$\therefore y = 10$

Clave D

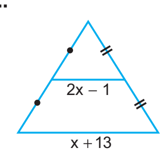
21.



$RM = \dfrac{QP}{2}$
$x + 28 = 3x + 10$
$2x = 18$
$\therefore x = 9$

Clave E

22.



$2x - 1 = \dfrac{x + 13}{2}$

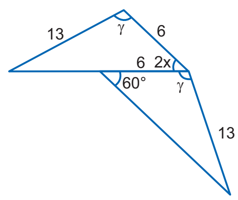
$4x - 2 = x + 13$

$3x = 15$

$\therefore x = 5$

Clave D

23.

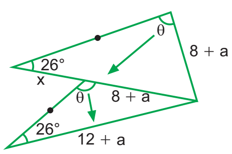


$2x = 60°$

$\therefore x = 30°$

Clave C

24.



$x + 8 + a = 12 + a$

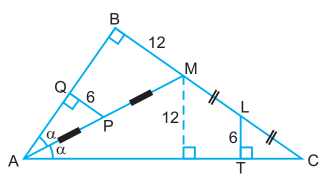
$x + 8 = 12$

$\therefore\ x = 4$

Clave B

Resolución de problemas

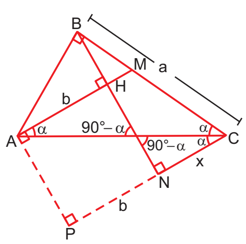
25. Piden: PQ



$\therefore$ PQ = 6

Clave E

26.



Por dato: $a - b = 5$

Piden: CN = x

Por el teorema de la bisectriz:

CP = BC

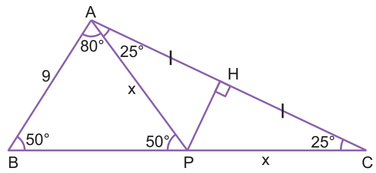
$x + b = a$

$x = a - b = 5$

$\therefore\ x = 5$

Clave B

27.



Por dato: $\overline{PH}$ mediatriz de $\overline{AC}$

$\Rightarrow m\angle PCA = m\angle PAC = 25°$

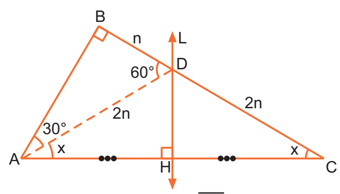
Además: PC = AP = x

El $\triangle$BAP resulta isósceles.

$\Rightarrow$ AP= AB = 9 $\quad\therefore\ x = 9$

Clave D

28.



Por dato: $\overleftrightarrow{L}$ mediatriz de $\overline{AC}$.

Entonces el ◺ABD resulta notable de 30° y 60°.

En el $\triangle$ADC:

$x + x = 60°$

$2x = 60°$

$\therefore x = 30°$

Clave C

Nivel 3 (página 42) Unidad 2

Comunicación matemática

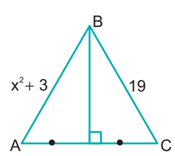
29.

30.

31.

Razonamiento y demostración

32.



$\overline{BH}$ resulta mediatriz de $\overline{AC}$.

Luego:

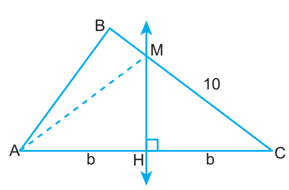
$x^2 + 3 = 19$

$x^2 = 16$

$\therefore x = 4$

Clave C

33.



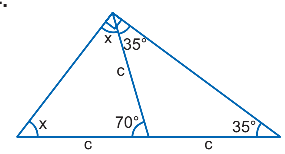
$\overline{MH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, entonces:

AM = MC

$\therefore$ AM = 10

Clave D

34.



Del gráfico:

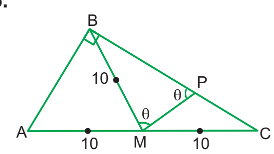
$x + 35° = 90°$

$x = 55°$

$\therefore x + 10° = 65°$

Clave B

35.



$\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa.

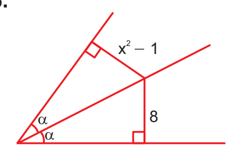
Entonces: AM = MC = BM

Del gráfico: BM = BP = 10

$\therefore$ BP = 10

Clave A

36.



Por el teorema de la bisectriz:

$x^2 - 1 = 8$

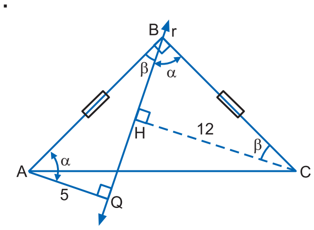
$x^2 = 9$

$\therefore x = 3$

Clave C

Resolución de problemas

37.



Sean: AQ = 5 y CH = 12

($\overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{r}$ y $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{r}$)

Incógnita: HQ

Si: $m\angle BAQ = \alpha \wedge m\angle ABQ = \beta$

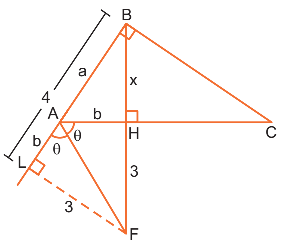
$\alpha + \beta = 90°$

Luego: $m\angle HBC = \alpha \wedge m\angle BCH = \beta$

Entonces: ⊿ AQB $\cong$ ⊿ BHC (Caso ALA)
$BH = AQ \Rightarrow BH = 5$
$BQ = CH \Rightarrow BQ = 12$
$\therefore HQ = BQ - BH = 7$

Clave E

38.



Trazamos $\overline{FL}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{BA}$.

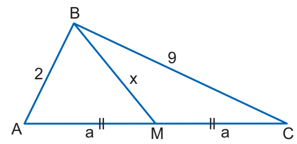
Por el teorema de la bisectriz tenemos:
$AH = AL = b$
$FL = FH = 3$

Pero por dato: $AB + AH = 4$
$\Rightarrow a + b = 4$

En el ⊿ BLF notable:
$x + 3 = 5$
$\therefore x = 2$

Clave A

39.



Por desigualdad triangular en el $\triangle ABC$:

$9 - 2 < 2a < 9 + 2$
$7 < 2a < 11$
$\Rightarrow 3{,}5 < a < 5{,}5$ ...(1)

En el $\triangle ABM$:

$\Rightarrow a - 2 < x < a + 2$ ...(2)

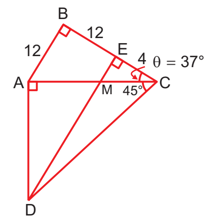
En el $\triangle BMC$:
$9 - a < x < 9 + a$ ...(3)

De (2) y (3):
$x < a + 2$
$\Rightarrow x - 2 < a$ ...(4)

De (1) y (4):
$x - 2 < a < 5{,}5$
$\Rightarrow x - 2 < 5{,}5$
$x < 7{,}5$
$\therefore x = 7$ (máximo valor entero)

Clave E

40.



En el ⊿ ABC:

$\tan\theta = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \theta = 37°$

El ⊿ DAC es isósceles (dato):
$\Rightarrow m\angle DCA = 45°$

En el ⊿ DEC notable de 8° y 82°:
$DE = 7(4) = 28$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 46) Unidad 2

Comunicación Matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. $S_{m\angle i} = 180°(12 - 2)$

$S_{m\angle i} = 180°(10)$

$S_{m\angle i} = 1800°$

Clave B

5. $D_T = \frac{5}{2}(5 - 3)$

$D_T = \frac{5}{2}(2)$

$D_T = 5$

Clave E

6. $D_T = \frac{11}{2}(11 - 3)$

$D_T = \frac{11}{2}(8)$

$D_T = 44$

Clave C

7. Nonágono = 9 lados y 9 ángulos

$D_T = \frac{9(9-3)}{2}$

$D_T = 27$

Clave D

8. $D_T = \frac{36(36-3)}{2}$

$D_T = 594$

Clave B

Resolución de problemas

9. Piden: $\angle c$

Dato: $S_{m\angle i} = 56(90°)$

Entonces:

$180°(n - 2) = 56(90°)$

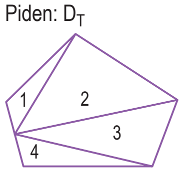
$(n - 2) = 28$

$\Rightarrow n = 30$

$\therefore\ m\angle c = \frac{360°}{30} = 12°$

Clave B

10. Piden: D_T



n = 5 lados

$D_T = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow D_T = \frac{5(2)}{2}$

$\therefore\ D_T = 5$

Clave C

11. Piden: $S_{m\angle i}$

Dato: $D_T = 4n$

Entonces:

$\frac{n(n-3)}{2} = 4n$

$n - 3 = 8$

$n = 11$

Como:

$S_{m\angle i} = 180°(n - 2)$

$S_{m\angle i} = 180°(9)$

$\therefore\ S_{m\angle i} = 1620°$

Clave C

12. Sea n el número de lados del polígono.

Del enunciado:

$\frac{n(n-3)}{2} = 4(4n)$

$n - 3 = 32$

$\therefore\ n = 35$

Clave B

13. Sea n el número de lados del polígono.

$5n + 1 = n(2n - 19) - \frac{(2n-18)(2n-17)}{2}$

$5n + 1 = \frac{2(2n^2 - 19n) - 4n^2 + 70n - 306}{2}$

$5n + 1 = \frac{4n^2 - 38n - 4n^2 + 70n - 306}{2}$

$10n + 2 = 32n - 306$

$22n = 308$

$\therefore\ n = 14$

Clave D

14. Sea n número de lados del polígono:

$\frac{180°(n-2)}{n} - 10° = \frac{180°\left(\frac{2n}{3} - 2\right)}{\frac{2n}{3}}$

$180° - \frac{360°}{n} - 10° = 180° - \frac{360°}{\frac{2n}{3}}$

$\frac{360°(3)}{2n} - \frac{360°}{n} = 10°$

$\frac{360°}{n}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 10°$

$\frac{360°}{n}\left(\frac{1}{2}\right) = 10°$

$\therefore\ n = 18$

Clave E

15. Sea n el número de lados del polígono.

Del enunciado:

$\frac{\frac{180°(n-2)}{n}}{\frac{360°}{n}} = \frac{5}{1}$

$\frac{n-2}{2} = 5$

$n = 12$

Entonces:

$D_T = \frac{12(12-3)}{2}$

$\therefore\ D_T = 54$

Clave D

16. Sea n: el número de lados del polígono.

Del enunciado:

$\frac{360°}{n} = 60° + \frac{180°(n-2)}{n}$

$\frac{6}{n} - \frac{3(n-2)}{n} = 1$

$6n - 3n^2 + 6n = n^2$

$12n = 4n^2 \quad \therefore\ n = 3$

Clave E

Nivel 2 (página 47) Unidad 2

Comunicación Matemática

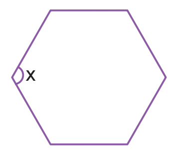
17.

18.

19.

Razonamiento y demostración

20.



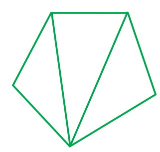
Como es un polígono regular:

$x = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°(6-2)}{6} = 120°$

$\therefore x = 120°$

Clave B

21.



Número de diagonales que faltan trazar: x

$x = \frac{n(n-3)}{2} - 2$

$x = \frac{5(5-3)}{2} - 2$

$\therefore\ x = 3$

Clave C

22. $D_T = \frac{n(n-3)}{2} = 9$

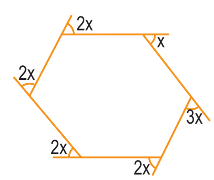
$n(n - 3) = 18 = 6(3)$

$n(n - 3) = 18 = 6(6 - 3)$

$\therefore\ n = 6$

Clave E

23.

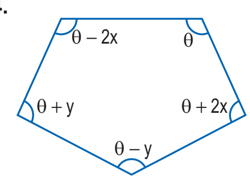


$12x = 360°$

$x = 30°$

Clave E

24.



$5\theta = 180°(5 - 2)$

$5\theta = 540°$

$\theta = 108°$

Clave B

25. $\dfrac{m\angle i}{m\angle c} = \dfrac{\dfrac{180°(n-2)}{n}}{\dfrac{360°}{n}} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow n = 5$

Clave A

26. $\dfrac{n(n-3)}{2} + 2n = 36$

$n^2 - 3n + 4n = 72$

$n^2 + n - 72 = 0$

$n = 8$

$m\angle i = \dfrac{180°(6)}{8} = 135°$

Clave D

27. $\dfrac{360°}{n} - \dfrac{180°(n-2)}{n} = 60°$

$\dfrac{360°}{n} - 180° + \dfrac{360°}{n} = 60°$

$\dfrac{720°}{n} = 60° + 180°$

$3 = n$

Clave E

28. $\dfrac{360°}{n-6} - \dfrac{360°}{n} = 80°$

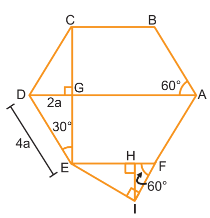
$9n - 9(n-6) = 2n(n-6)$

$27 = n(n-6)$

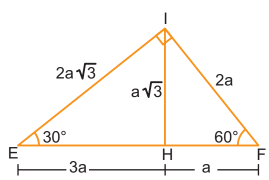
$n = 9$

Clave E

29.



Del ⊿EIF:



Luego sabemos que:

$EF = 4a \Rightarrow DA = 8a$ (por ser polígono regular)

$\therefore \dfrac{GA}{EH} = \dfrac{6a}{3a} = 2$

Clave A

30. Del enunciado:

$\dfrac{180°(n-2)}{n} - 2° = \dfrac{180°(n-4)}{n-2}$

$0 = n^2 + 2n - 360$

$0 = n \quad +18$

$0 = n \quad -20$

$20 = n$

$S_{m\angle i} = 180°(20-2) = 3240°$

Clave C

Nivel 3 (página 48) Unidad 2

Comunicación Matemática

31.

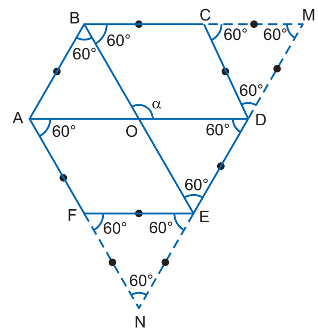
32.

33. $S_{m\angle e} = 360°$

Clave D

Razonamiento y demostración

34.



Del gráfico, para ABCDEF:

$m\angle e = \dfrac{360°}{6} = 60°$

Prolongamos $\overline{BC}$ y $\overline{ED}$, se forma entonces el $\triangle BME$ equilátero.

$\Rightarrow m\angle MBE = m\angle MEB = 60°$

Análogamente se forma el $\triangle AND$ equilátero.

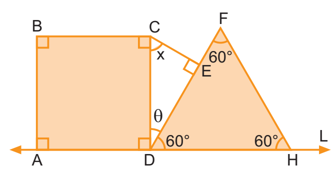
Luego, en el $\triangle ODE$:

$60° + 60° = \alpha$

$\therefore \alpha = 120°$

Clave B

35.



Por dato: los polígonos ABCD y DFH son regulares.

Del gráfico:

$90° + \theta + 60° = 180°$

$\Rightarrow \theta = 30°$

En el ⊿DEC:

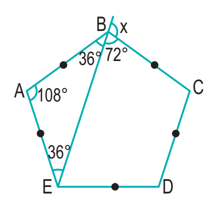
$x + \theta = 90°$

$x + 30° = 90°$

$\therefore x = 60°$

Clave A

36.



Del gráfico:

$m\angle A = m\angle i = \dfrac{180°(5-2)}{5} = 108°$

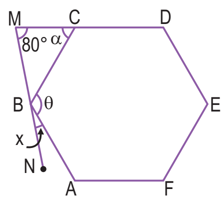
En el $\triangle ABE$ isósceles:

$m\angle ABE = m\angle AEB = 36°$

Como ABCDE es un polígono regular:
$m\angle A = m\angle B = 108° \Rightarrow m\angle EBC = 72°$
Luego:
$x + 72° = 180°$
$\therefore x = 108°$

Clave D

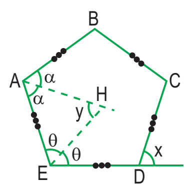
37.



Por dato: ABCDEF es un polígono regular.
Sea: $\alpha = m\angle e = \dfrac{360°}{6} = 60°$
$\Rightarrow \alpha = 60°$
Luego:
$\theta = m\angle i = \dfrac{180°(6-2)}{6} = 120°$
$\Rightarrow \theta = 120°$
En el ΔCMB:
$\alpha + 80° = \theta + x$
$60° + 80° = 120° + x$
$140° = 120° + x$
$\therefore x = 20°$

Clave B

38.

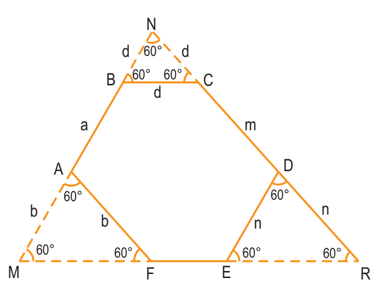


Por dato: el polígono es regular.
$\Rightarrow m\angle i = \dfrac{180°(5-2)}{5} = 108°$
Del gráfico:
$m\angle i = 2\alpha = 108° \Rightarrow \alpha = 54°$
$m\angle i = 2\theta = 108° \Rightarrow \theta = 54°$
En el ΔAHE:
$\alpha + \theta + y = 180°$
$54° + 54° + y = 180° \Rightarrow y = 72°$
Además: $m\angle e = x$
$\dfrac{360°}{5} = x \Rightarrow x = 72°$
Piden:
$x + y = 72° + 72°$
$\therefore x + y = 144°$

Clave D

Resolución de problemas

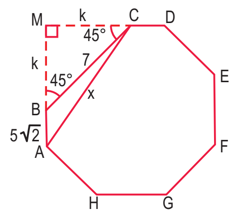
39.



Por dato, el hexágono ABCDEF es equiángulo.
$\Rightarrow m\angle e = \dfrac{360°}{6} = 60°$
Luego, al prolongar los lados se forma el ΔMNR que resulta equilátero.
$\Rightarrow MN = NR$
$b + a + d = d + m + n$
$\Rightarrow a + b = m + n$
Pero: $a + b = 5$ (dato)
$\therefore m + n = 5$

Clave E

40.



Por dato, el polígono ABCDEFGH es equiángulo.
$\Rightarrow m\angle e = \dfrac{360°}{8} = 45°$
En el ⊿BMC: $k\sqrt{2} = 7 \Rightarrow k = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$
En el ⊿CMA, por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = k^2 + (k + 5\sqrt{2})^2$
$x^2 = \left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2} + 5\sqrt{2}\right)^2$
$x^2 = \dfrac{49}{2} + \left(\dfrac{17\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{49}{2} + \dfrac{289}{2} = 169$
$\Rightarrow x^2 = 169$
$\therefore x = 13$

Clave B

41.

n.° de lados	n.° de diagonales (D_T)
n	$\dfrac{n(n-3)}{2}$
n + 1	$\dfrac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$

Por dato:
$\dfrac{(n+1)(n-2)}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2} + 2$
$(n+1)(n-2) = n(n-3) + 4$
$n^2 - n - 2 = n^2 - 3n + 4$
$3n - n = 6$
$2n = 6$
$\Rightarrow n = 3$
Por lo tanto, el polígono inicial tiene 3 lados.

Clave B

42. Sea n: el número de lados del polígono regular.
Por dato:
$m\angle i - m\angle e = \dfrac{m\angle c}{2}$
$\dfrac{180°(n-2)}{n} - \dfrac{360°}{n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{360°}{n}\right)$
$180°(n-2) - 360° = 180°$
$180°(n-2) = 540°$
$n - 2 = 3$
$\Rightarrow n = 5$
Por lo tanto, el polígono tiene 5 lados.

Clave C

43. Sea el número de lados del polígono regular: n
Por dato:
$\dfrac{m\angle i}{m\angle e} = 5 \Rightarrow m\angle i = 5m\angle e$
Reemplazando:
$\dfrac{180°(n-2)}{n} = 5 \cdot \dfrac{360°}{n}$
$180°(n-2) = 1800°$
$n - 2 = 10$
$\Rightarrow n = 12$
Piden: n.° de diagonales (D_T)
$D_T = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{12(12-3)}{2} = 54$
$\therefore D_T = 54$

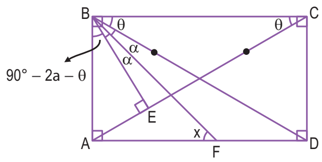
Clave C

44. Sea n el número de lados del polígono regular.
Por dato:
$(m\angle c)^2 = 9(m\angle i)$
Entonces: $\left(\dfrac{360}{n}\right)^2 = 9 \cdot \dfrac{180(n-2)}{n}$
Reduciendo: $80 = n(n-2)$
$10 \cdot 8 = n(n-2)$
$10(10-2) = n(n-2)$
$\Rightarrow n = 10$
Piden: n.° de diagonales (D_T)
$D_T = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{10(10-3)}{2}$
$\therefore D_T = 35$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 50) Unidad 2

1.



Del △BEC:

$2\theta + 2\alpha = 90°$

$\theta + \alpha = 45°$

Del △BAF:

$90° - 2\alpha - \theta + \alpha + x = 90°$

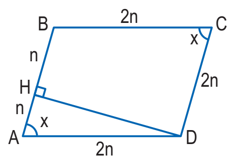
$\alpha + \theta = x$

Reemplazamos:

$\therefore\ x = 45°$

Clave B

2.

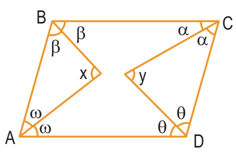


El triángulo AHD es notable de 30° y 60°.

$\therefore\ x = 60°$

Clave C

3.



Dato: ABCD es un romboide.

$2\beta + 2\omega = 180°$

$\beta + \omega = 90° \Rightarrow x = 90°$

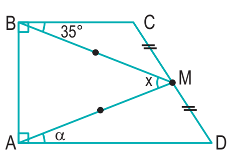
$2\alpha + 2\theta = 180°$

$\alpha + \theta = 90° \Rightarrow y = 90°$

Luego: $x + y = 180°$

Clave A

4.



Por propiedad:

$\alpha = 35°$

Del gráfico:

$x = 35° + 35°$

$\therefore\ x = 70°$

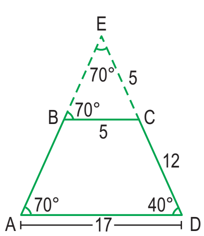
Clave B

5. El △BEC es isósceles

El △ADE es isósceles

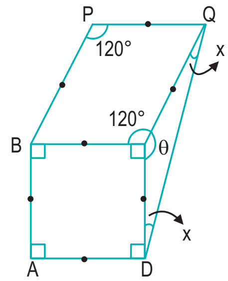
$AD = DC + CE = 5 + 12$

$AD = 17$



Clave B

6.



$90° + 120° + \theta = 360°$

$\theta = 150°$

Luego:

$2x + \theta = 180°$

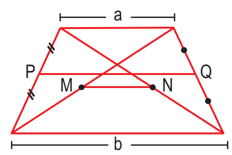
$2x + 150° = 180°$

$2x = 30°$

$x = 15°$

Clave B

7.



$PQ - MN = 8$

$\dfrac{b+a}{2} - \dfrac{b-a}{2} = 8$

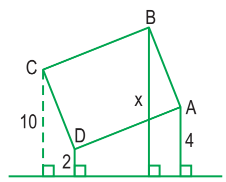
$\dfrac{b+a-b+a}{2} = 8$

$\dfrac{2a}{2} = 8$

$a = 8$

Clave D

8. Según el enunciado:



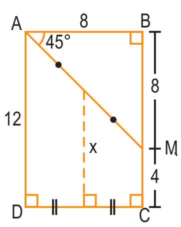
Por propiedad:

$10 + 4 = x + 2$

$\therefore\ x = 12$

Clave B

9.



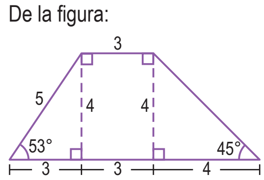
$x = \dfrac{12+4}{2}$

$x = \dfrac{16}{2}$

$x = 8$

Clave D

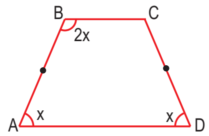
10. De la figura:



La mediana será: $\dfrac{3+(3+3+4)}{2} = 6{,}5$

Clave A

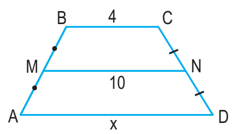
11.



El trapecio ABCD isósceles.
Entonces:
$2x + x = 180°$
$3x = 180°$
$x = 60°$

Clave C

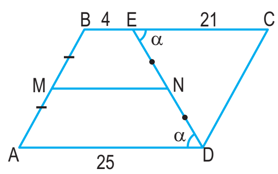
12.



$\overline{MN}$: mediana del trapecio.
$10 = \dfrac{x+4}{2}$
$x = 20 - 4$
$\therefore\ x = 16$

Clave E

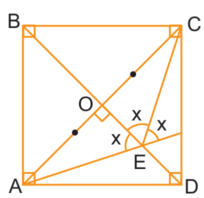
13.



$\overline{MN}$: mediana del trapecio
$\overline{MN} = \dfrac{25+4}{2} = 14,5$

Clave C

14.



Trazamos la diagonal AC del cuadrado:
$\Rightarrow AO = OC$
$\Rightarrow m\angle AEO = m\angle OEC$
Del gráfico:
$x + x + x = 180°$
$3x = 180°$
$\therefore\ x = 60°$

Clave C

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 52) Unidad 2

Comunicación matemática

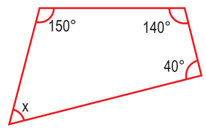
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

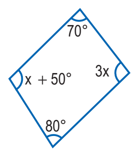
4.



$x + 150° + 180° = 360°$
$x = 360° - 330°$
$x = 30°$

Clave A

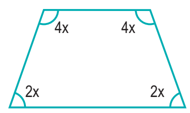
5.



$x + 50° + 3x + 150° = 360°$
$4x = 160°$
$x = 40°$

Clave A

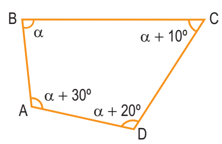
6.



$12x = 360°$
$x = 30°$

Clave E

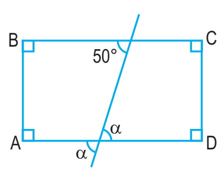
7.



En el cuadrilátero ABCD:
$\alpha + \alpha + 10° + \alpha + 20° + \alpha + 30° = 360°$
$4\alpha + 60° = 360°$
$4\alpha = 300°$
$\therefore \alpha = 75°$

Clave C

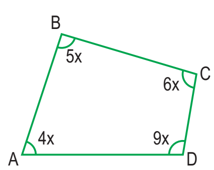
8.



Por dato: ABCD es un rectángulo.
Entonces: $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
Por ángulos alternos internos: $\alpha = 50°$.

Clave C

9.



En el cuadrilátero ABCD:
$4x + 5x + 6x + 9x = 360°$
$24x = 360°$
$\therefore x = 15°$

Clave C

Resolución de problemas

10. Sea "a" la medida los ángulos iguales:
$\Rightarrow a + a + a + 120° = 360°$
$3a = 240°$
$\therefore a = 80°$

Clave C

11. Según dato:
Ángulo obtuso = 2 (suma de ángulos agudos)
Si:
Ángulo agudo = α
$\Rightarrow$ Ángulo obtuso $= 2(2\alpha) = 4\alpha$
$\Rightarrow \alpha + 4\alpha = 180° \Rightarrow 5\alpha = 180°$
$\therefore\ \alpha = 36°$

Clave B

12. Sean las bases: **a** y **b** $\Rightarrow a = 5x \wedge b = 8x$.
Por dato: mediana = 26 m.
$\Rightarrow \dfrac{5x+8x}{2} = 26 \Rightarrow 13x = 52$
$\Rightarrow\ x = 4$ m
La base menor es:
$a = 5x = 20$ m

Clave E

13. Por propiedad:
Ángulo pedido $= \dfrac{100° + 120°}{2}$
Por tanto:
Ángulo pedido $= \dfrac{220°}{2} = 110°$

Clave C

14. Los ángulos deben sumar 360°, entonces:
$\dfrac{3}{4}x + x + \dfrac{2}{3}x + 3x - 20° = 360°$
$\dfrac{9x + 12x + 8x + 36x - 240°}{12} = 360°$
$65x - 240° = 4320°$
$65x = 4560°$
$x = 70,154°$
Luego: $m\angle A = 52,61°$

Clave A

15.

Por propiedad:
El ángulo menor es:
$\dfrac{70° + 80°}{2} = 75°$
Entonces el ángulo mayor es:
$180° - 75° = 105°$

Clave D

Nivel 2 (página 53) Unidad 2

Comunicación matemática

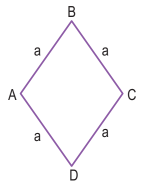
16.

17.

18.

Razonamiento y demostración

19.



Dato:

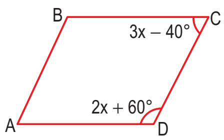
$2p_{\diamond ABCD} = 56$

$4a = 56$

$\therefore a = 14$

Clave C

20.



ABCD es un paralelogramo.

Entonces:

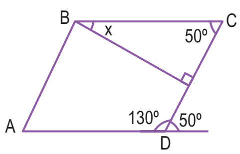
$3x - 40° + 2x + 60° = 180°$

$5x = 160°$

$\therefore x = 32°$

Clave B

21.



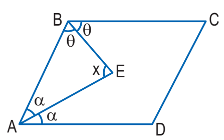
Del gráfico:

$x + 50° = 90°$

$\therefore x = 40°$

Clave C

22.



Del paralelogramo ABCD:

$2\alpha + 2\theta = 180°$

$\alpha + \theta = 90°$

Del $\triangle$ABE:

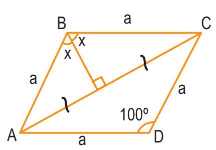
$x + \alpha + \theta = 180°$

$x + 90° = 180°$

$\therefore x = 90°$

Clave C

23.



Del rombo ABCD:

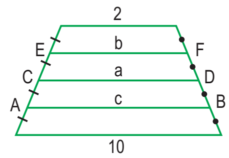
$2x = 100°$

$\therefore x = 50°$

Clave A

Resolución de problemas

24.



Por propiedad:

$a = \dfrac{2 + 10}{2} \Rightarrow a = 6$

$b = \dfrac{2 + a}{2} = \dfrac{2 + (6)}{2} \Rightarrow b = 4$

$c = \dfrac{a + 10}{2} = \dfrac{(6) + 10}{2} \Rightarrow c = 8$

Piden:

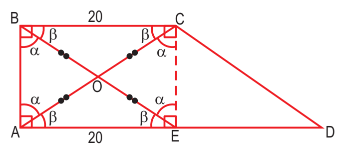
$AB + CD + EF = c + a + b$

$\Rightarrow AB + CD + EF = 8 + 6 + 4$

$\therefore AB + CD + EF = 18$

Clave D

25.



En el $\triangle$ABC:

$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

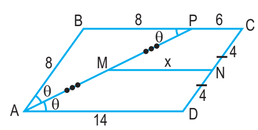
Por dato: $\overline{BC} \parallel \overline{AD} \;\wedge\; AC = BE$

Entonces, el cuadrilátero ABCD resulta ser un rectángulo.

$\therefore AE = 20$

Clave D

26.



Por dato: ABCD es un paralelogramo.

El $\triangle$ABP resulta ser isósceles.

$\Rightarrow AB = BP = 8$

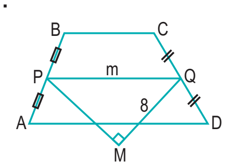
Además x es la mediana del trapecio ABCD.

$\Rightarrow x = \dfrac{6 + 14}{2} = 10$

$\therefore x = 10$

Clave E

27.



Por dato: $BC + AD = 20$

Por propiedad: $m = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{20}{2}$

$\Rightarrow m = 10$

En el $\triangle$PMQ por el teorema de Pitágoras:

$m^2 = 8^2 + (PM)^2$

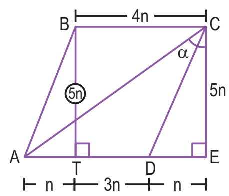
$10^2 = 8^2 + (PM)^2$

$\Rightarrow (PM)^2 = 36$

$\therefore PM = 6$

Clave C

28.



$BT = 5(AT) = 5n$

$BC = 4(AT) = 4n$

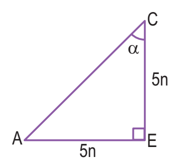
El ▱TBCE es un rectángulo:

$\Rightarrow BT = CE$

El ▱BCDA es un paralelogramo:

$\Rightarrow BC = AD$

Luego del $\triangle$AEC tenemos:



$\therefore \alpha = 45°$

Clave C

Nivel 3 (página 54) Unidad 2

Comunicación matemática

29.

30.

31.

Razonamiento y demostración

32.

$x = \alpha + \beta$

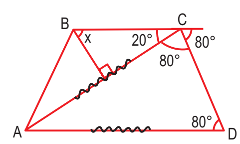
$2\alpha + 2\beta + 70° + 80° = 360°$

$\alpha + \beta = \dfrac{210°}{2} = 105°$

$\therefore x = 105°$

Clave C

33.



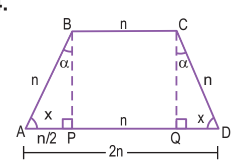
Del gráfico:

$x + 20° = 90°$

$\therefore x = 70°$

Clave C

34.



⊿APB ≅ ⊿DQC (Caso ALA)

$AP + QD = n$

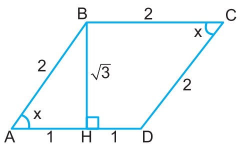
$2AP = n$; pero $AP = QD$

$\Rightarrow AP = \dfrac{n}{2} \Rightarrow$ ⊿APB es notable (30° y 60°)

$\therefore\ x = 60°$

Clave C

35.



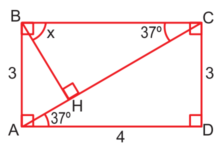
Dato: ABCD es un rombo.

El ⊿ BHA es notable (30°y 60°)

$\therefore\ x = 60°$

Clave C

36.



Del ⊿BHC:

$x + 37° = 90°$

$\therefore\ x = 53°$

Clave A

Resolución de problemas

37. Sean las bases: a, b.

$a - b = 22$

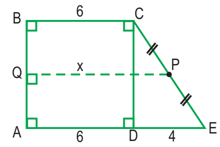
$a + b = 92 \times 2 = 184$

$\Rightarrow a = \dfrac{184 + 22}{2} = 103$ m

$\Rightarrow b = \dfrac{184 - 22}{2} = 81$ m

Clave C

38. Según el enunciado:



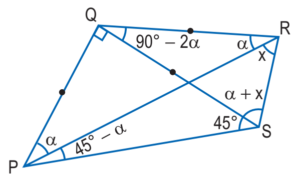
En el trapecio ABCE: $\overline{QP}$ es base media

$\Rightarrow PQ = \dfrac{BC + AE}{2}$

$PQ = \dfrac{6 + 10}{2} = 8$ m

Clave A

39.



En el △SQR:

$90° - 2\alpha + \alpha + x + \alpha + x = 180°$

$2x = 90°$

$\therefore x = 45°$

Clave A

40. Sean las bases: **a** y **(30 – a)**.

La mediana es: $\dfrac{a + 30 - a}{2} = 15$

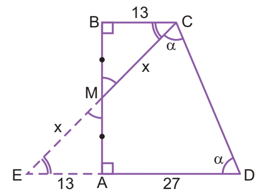
Una de las bases es: $\dfrac{15}{3} = 5$

Entonces la base mayor es:

$30 - 5 = 25$

Clave B

41. Según el enunciado:



El △CED es isósceles ⇒ EC = ED

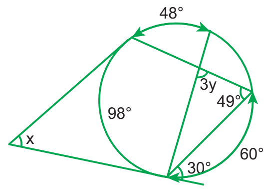
$\Rightarrow 2x = 13 + 27$

$x = 20$

Clave E

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 56) Unidad 2

1.



Hallamos x:

$x + 98° = 180°$

$x = 82°$

Hallamos y:

$3y = \dfrac{48° + 60°}{2}$

$3y = 54°$

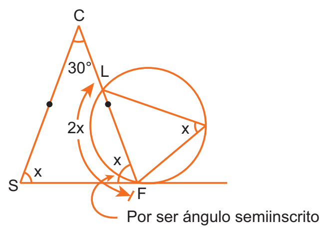
$y = 18°$

$\therefore x + y = 100°$

Clave C

2. Piden: x

Si: CS = CF



Del gráfico:

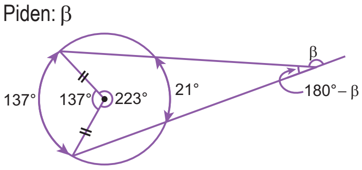
$x + 30° + x = 180°$

$2x = 150°$

$\therefore x = 75°$

Clave A

3. Piden: β



Del gráfico:

Por propiedad: (ángulo exterior)

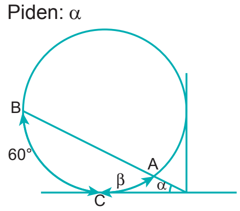
$180° - \beta = \dfrac{137° - 21°}{2}$

$180° - \beta = 58°$

$\therefore \beta = 122°$

Clave D

4. Piden: α



Dato: $m\overset{\frown}{BC} = 2m\overset{\frown}{AC}$

$60° = 2\beta$

$\Rightarrow \beta = 30°$

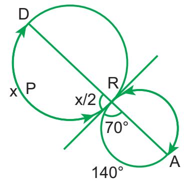
Por propiedad:

$\alpha = \dfrac{60° - \beta}{2} = \dfrac{60° - 30°}{2}$

$\therefore \alpha = 15°$

Clave C

5. Piden: $\overset{\frown}{DPR} = x$



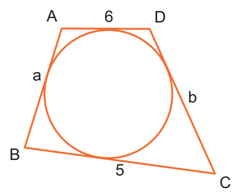
$\dfrac{x}{2} + 70° = 180°$

$\dfrac{x}{2} = 110°$

$\therefore x = 220°$

Clave C

6.



Por el teorema de Pitot:

AB + CD = BC + AD

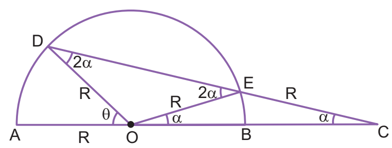
a + b = 6 + 5 = 11

Por lo tanto:

El perímetro es: a + b + 6 + 5 = 22

Clave C

7.



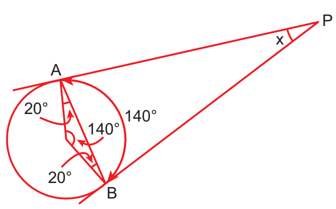
Por ser θ ángulo exterior en el $\triangle$DOC

$\theta = \alpha + 2\alpha$

$\therefore \theta = 3\alpha$

Clave B

8.



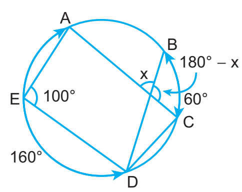
Por propiedad:

$140° + x = 180°$

$x = 40°$

Clave D

9.



Por ángulo interior:

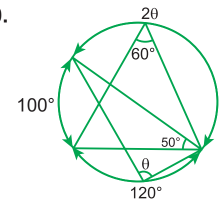
$180° - x = \dfrac{160° + 60°}{2}$

$180° - x = 110°$

$\therefore x = 70°$

Clave A

10.



$2\theta + 100° + 120° = 360°$

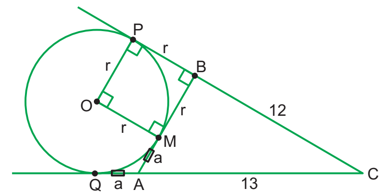
$2\theta = 140°$

$\therefore \theta = 70°$

Clave D

11. Trazamos $\overline{OP}$ y $\overline{OM}$ perpendiculares a $\overline{PC}$ y a $\overline{AB}$ respectivamente

$\Rightarrow$ El ⏢OPBM es un cuadrado de lado "r"



El $\triangle$ABC es un triángulo pitagórico

$\Rightarrow$ si: BC = 12 y AB = 5 $\Rightarrow$ AC = 13;

Luego por propiedad de la circunferencia:

PB = BM = r y MA = AQ = a $\wedge$

También: CP = CQ

Reemplazando:

$$\left.\begin{array}{l} a + 13 = r + 12 \Rightarrow r - a = 1 \\ \text{Además } AB = 5 \Rightarrow \underline{r + a = 5} \end{array}\right\} +$$

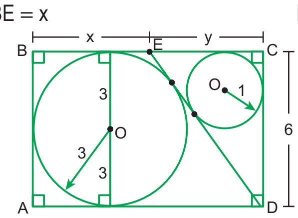
$2r = 6 \Rightarrow r = 3$

Clave B

12. Vemos que el diámetro de la circunferencia mayor es igual al lado menor del rectángulo ABCD $\Rightarrow$ AB = CD = 6

asignamos: BE = x

asignamos EC = y



En el ⊿ ECD aplicamos el teorema de Poncelet:

y + 6 = ED + 2

En el ⏢ ABED aplicamos el teorema de Pitot:

6 + ED = x + x + y

Sumamos ambas expresiones:

12 + y + ED = 2x + y + ED + 2

12 = 2(x + 1) $\Rightarrow$ x = 5

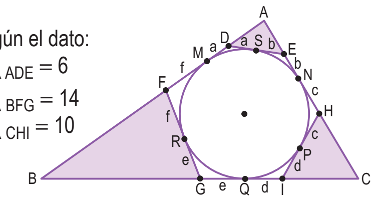
Clave B

13. Sabemos por propiedad que:

MD = DS = a, SE = EN = b, NM = HP = c,

PI = IQ = d, QG = GR = e y RF = FM = f

Según el dato:
$2p_{\triangle ADE} = 6$
$2p_{\triangle BFG} = 14$
$2p_{\triangle CHI} = 10$



Reemplazando y sumando tendremos:

$2p_{\triangle ADE} = DA + a + b + AE = 6$
$2p_{\triangle BFG} = BF + f + e + BG = 14$
$2p_{\triangle CHI} = CH + c + d + CI = 10$
Sumamos las tres expresiones y asociamos sus elementos.

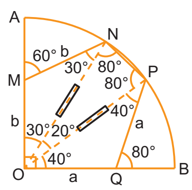
$\underbrace{(BF + f + a + AD)}_{AB} + \underbrace{(BG + e + d + CI)}_{BC}$
$+ \underbrace{(CH + c + b + AE)}_{CA} = 30$

$\Rightarrow AB + BC + CA = 30$
$\therefore\ 2p_{\triangle ABC} = 30$

Clave E

14. Trazamos los radios $\overline{ON}$ y $\overline{OP}$, como $\overline{OM} \cong \overline{MN}$ y $\overline{OQ} \cong \overline{PQ}$, los triángulos OMN y OPQ son isósceles, además del $\triangle ONP$ (ON = OP)

Por ángulo externo:
I. $2m\angle AON = 60°$
$\Rightarrow m\angle AON = m\angle ONM = 30°$
II. $2m\angle BOP = 80°$
$\Rightarrow m\angle BOP = m\angle OPQ = 40°$



Luego: $m\angle AOB = 30° + 40° + m\angle NOP$
Reemplazando: $90° = 30° + 40° + m\angle NOP$
$\Rightarrow m\angle NOP = 20°$
Luego en el triángulo isósceles ONP (ON = OP y $m\angle ONP = m\angle OPN$)
$2m\angle ONP + 20° = 180° \Rightarrow m\angle ONP = 80°$
$\Rightarrow x = m\angle ONM + m\angle ONP$; reemplazando:
$x = 30° + 80°$
$x = 110°$

Clave C

PRACTIQUEMOS

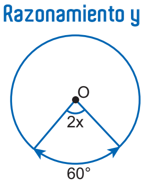
Nivel 1 (página 58) Unidad 2

Comunicación matemática

1.
2.
3.

Razonamiento y demostración

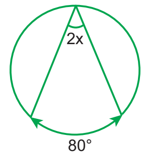
4.



$2x = 60°$
$x = 30°$

Clave E

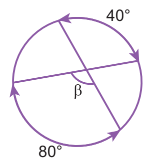
5.



$2x = \dfrac{80°}{2}$
$2x = 40°$
$x = 20°$

Clave B

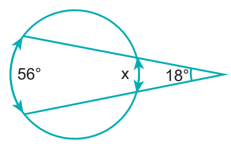
6.



$\beta = \dfrac{80° + 40°}{2}$
$\beta = 60°$

Clave A

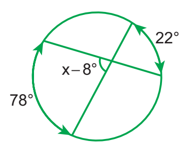
7.



$18° = \dfrac{56° - x}{2}$
$36° = 56° - x$
$x = 20°$

Clave B

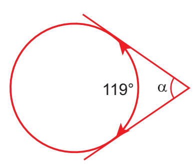
8.



$x - 8° = \dfrac{22° + 78°}{2}$
$x - 8° = 50°$
$x = 58°$

Clave D

9.

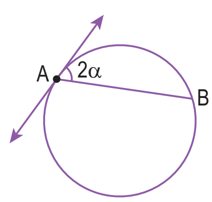


$\alpha + 119° = 180°$
$\alpha = 61°$

Clave D

Resolución de problemas

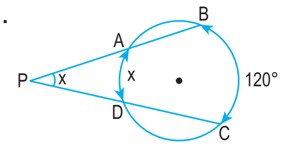
10. Piden: α
Dato: $m\overset{\frown}{AB} = \alpha + 60°$



Por propiedad:
$4\alpha = \alpha + 60°$
$3\alpha = 60°$
$\therefore \alpha = 20°$

Clave C

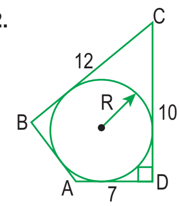
11.



Por ángulo exterior:
$x = \dfrac{120° - x}{2}$
$2x = 120° - x$
$\therefore x = 40°$

Clave D

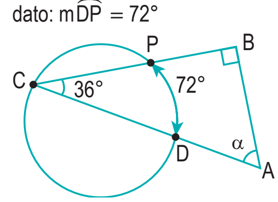
12.



Por el teorema de Pitot:
$AB + 10 = 12 + 7$
$AB + 10 = 19$
$\therefore AB = 9$

Clave E

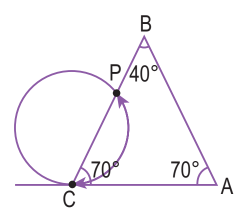
13. Piden α
dato: $m\overset{\frown}{DP} = 72°$



$m\angle C = \dfrac{m\overset{\frown}{PD}}{2} = \dfrac{72°}{2}$
$m\angle C = 36°$
$\Rightarrow m\angle C + m\angle A = 90°$
$36 + \alpha = 90°$
$\alpha = 54°$

Clave E

14. Piden: $m\overset{\frown}{DP}$
Dato: BC = BA



Por propiedad:
$m\overset{\frown}{DP} = 2m\angle PCA$
$m\overset{\frown}{DP} = 2(70°)$
$\therefore m\overset{\frown}{DP} = 140°$

Clave A

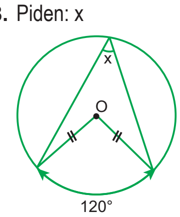
Nivel 2 (página 59) Unidad 2

Comunicación matemática

15.
16.
17.

Razonamiento y demostración

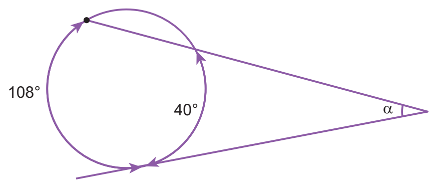
18. Piden: x



Por propiedad:
$2x = 120°$
$\therefore x = 60°$

Clave C

19. Piden: α



Por propiedad:

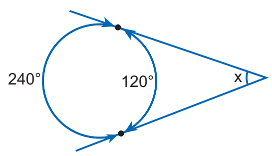
$$\alpha = \frac{108° - 40°}{2}$$

$$2\alpha = 68°$$

$$\therefore \quad \alpha = 34°$$

Clave D

20. Piden: x



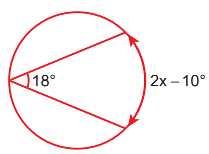
Por propiedad:

$$x = \frac{240° - 120°}{2}$$

$$\therefore x = 60°$$

Clave D

21. Piden: x



Por propiedad:

$$2(18°) = 2x - 10°$$

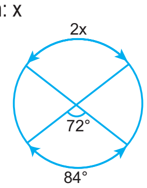
$$36° = 2x - 10$$

$$46° = 2x$$

$$\therefore x = 23°$$

Clave D

22. Piden: x



Por propiedad:

$$72° = \frac{2x + 84°}{2}$$

$$144° = 2x + 84°$$

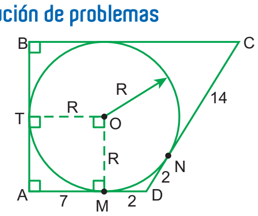
$$60° = 2x$$

$$\therefore x = 30°$$

Clave C

Resolución de problemas

23.



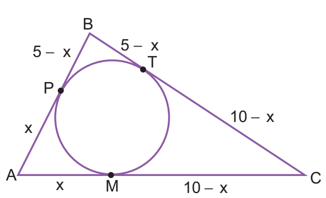
Del gráfico: AMOT resulta ser un cuadrado

$\Rightarrow$ OT = MA

$\therefore$ R = 7

Clave E

24.



Piden: AP = x

Por dato: BC = 8

Entonces:

$$(5 - x) + (10 - x) = 8$$

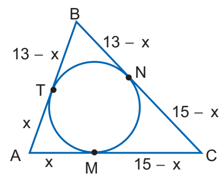
$$15 - 2x = 8$$

$$7 = 2x$$

$$\therefore x = 3{,}5$$

Clave D

25.



Piden: AT = x

Por dato: BC = 14

Entonces:

$$(13 - x) + (15 - x) = 14$$

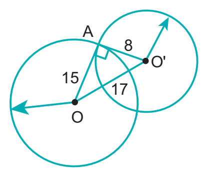
$$28 - 2x = 14$$

$$14 = 2x$$

$$\therefore x = 7$$

Clave C

26.



Por dato:
las circunferencias son ortogonales
$\Rightarrow m\angle OAO' = 90°$

Por el teorema de Pitágoras: OO' = 17

Sea r: el inradio del ⊿ OAO'

Por el teorema de Poncelet:

$$17 + 2r = 15 + 8$$

$$2r = 6$$

$$\therefore r = 3$$

Clave A

Nivel 3 (página 60) Unidad 2

Comunicación matemática

27.

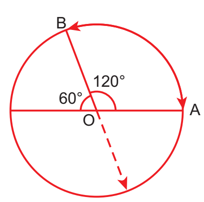
28.

29.

Razonamiento y demostración

30. Piden: $m\overset{\frown}{AB}$

Del gráfico:

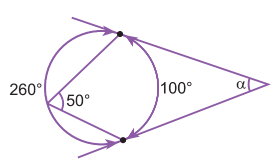


Por propiedad:

$\therefore m\overset{\frown}{AB} = 120°$

Clave E

31. Piden: α



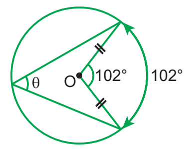
Por propiedad:

$$\alpha = \frac{260° - 100°}{2}$$

$$\therefore \alpha = 80°$$

Clave E

32. Piden: θ



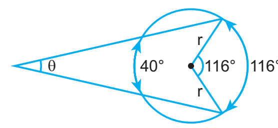
Por propiedad:

$$2\theta = 102°$$

$$\therefore \theta = 51°$$

Clave C

33. Piden: θ



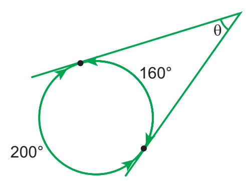
Por propiedad:

$$\theta = \frac{116° - 40°}{2}$$

$$\therefore \theta = 38°$$

Clave C

34. Piden: θ



Por propiedad:

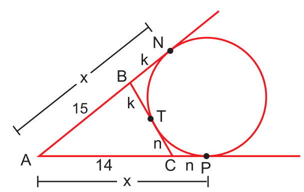
$$\theta = \frac{200° - 160°}{2}$$

$$\therefore \theta = 20°$$

Clave C

Resolución de problemas

35.



Por dato: $k + n = 13$ ...(1)

Del gráfico:

$x = k + 15 \Rightarrow k = x - 15$

$x = n + 14 \Rightarrow n = x - 14$

Reemplazando en (1):

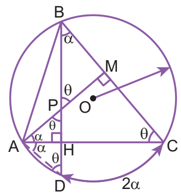
$$(x - 15) + (x - 14) = 13$$

$$2x = 42$$

$$\therefore x = 21$$

Clave E

36.

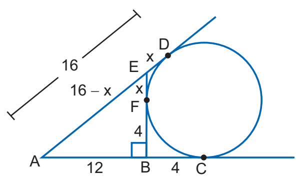


En el ⊿PMB:
$\alpha + \theta = 90°$

Del gráfico, el ΔPAD resulta ser isósceles.
$\Rightarrow HD = PH = 3$
$\therefore HD = 3$

Clave B

37.



En el ⊿ABE por el teorema de Pitágoras:

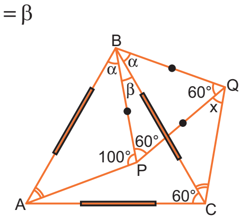
$$12^2 + (x + 4)^2 = (16 - x)^2$$
$$144 + x^2 + 8x + 16 = 256 - 32x + x^2$$
$$40x = 96$$
$$\therefore x = 2{,}4$$

Clave C

MARATÓN MATEMÁTICA (página 62)

1. Asignamos los siguientes valores simbólicos:

$m\angle CBQ = \alpha$
$m\angle CBP = \beta$



Pero como el ΔBPQ es equilátero:
$\Rightarrow \alpha + \beta = 60°$

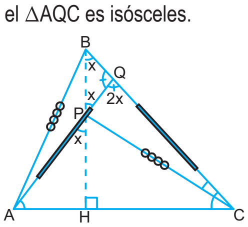
Luego $m\angle ABC = 60°$
Porque $AB = BC = AC$
$60° = m\angle ABP + \beta$

$\Rightarrow m\angle ABP = \alpha$; luego por inspección:
$\Delta ABP \cong \Delta CBQ$ (Caso LAL)
$\Rightarrow m\angle APB = m\angle CQB = 100°$

Pero $m\angle CQB = x + 60° = 100° \Rightarrow x = 40°$

Clave C

2. Prolongamos $\overline{AP}$ hasta que interseca a $\overline{BC}$ en el punto Q, luego del dato $m\angle PAC = m\angle BCA$, entonces el ΔAQC es isósceles.



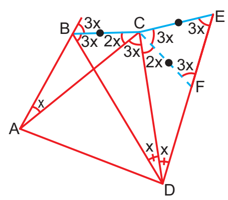
$\therefore \overline{AQ} \cong \overline{QC}$; luego:
$x + m\angle PAC = 90°$ ... (I)
$\Rightarrow m\angle HBC + m\angle BCA = 90°$

Pero: $m\angle PAC = m\angle BCA$
de (I): $m\angle HBC = x$

Luego como $\overline{AQ}$, $\overline{QC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{PC}$; además como $m\angle QBP = m\angle QPB = x \Rightarrow BQ \cong QP$
$\therefore \Delta ABQ \cong \Delta CPQ$ (caso LLL)
$\therefore m\angle BQA = m\angle PQC = 2x$
Luego: $2x + 2x = 180° \Rightarrow x = 45°$

Clave B

3. Construimos el ΔCDE:

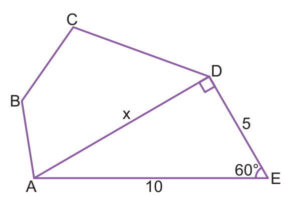


Tal que $\Delta CDE \cong \Delta CDB$
$\Rightarrow m\angle CED = 3x$
Luego trazamos $\overline{CF}$, tal que: $CF = CE$
$\Rightarrow m\angle CED = m\angle CFE$

Luego decimos que $\Delta CFD \cong \Delta CBA$ (Caso LLA) ya que $m\angle CBD = m\angle CFD$
$\therefore m\angle DCF = 2x$ y $m\angle BCD = m\angle EDC = x$; luego por ángulo externo:
$5x + 4x = 180° \Rightarrow x = 20°$

Clave E

4. Sabemos que la suma de los ángulos internos de un pentágono es igual a 540°.



$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = 540°$
Pero del dato:
$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 480°$

Reemplazando en la expresión anterior
$480° + m\angle E = 540°$
$\Rightarrow m\angle E = 60°$
Por lo que el ⊿ADE es notable de 30° y 60°.
$\therefore$ La distancia de A hasta ED será la longitud del cateto AD; $\Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

Clave E

5. Sabemos que el número de diagonales de un polígono convexo está dado por:

$D_T = (n/2)(n - 3)$, y el número de ángulos rectos a los que equivale la suma de los ángulos internos de un polígono convexo es igual a:

$N_{\angle 90°} = 2(n - 2)$; ahora planteamos la siguiente ecuación:

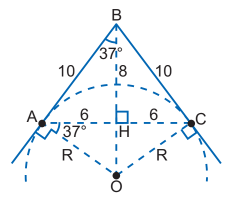
$D_T - 16 = N_{\angle 90°} - n$; reemplazando con las expresiones anteriores:
$(n/2)(n - 3) - 16 = 2(n - 2) - n$

$$\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - 16 = n - 4$$
$$n^2 - 5n = 24;$$

Obtenemos una ecuación de 2.° grado:
$n^2 - 5n - 24 = 0$; factorizamos
$(n - 8)(n + 3) = 0 \Rightarrow n = 8$
Por lo tanto, el polígono es un octágono.

Clave A

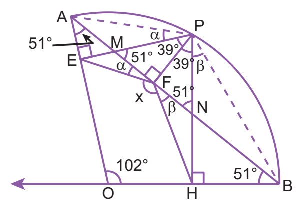
6. El triángulo ABC es un triángulo isósceles ($AB = BC = 10$ cm), por lo tanto AB y BC son tangentes a la circunferencia que pasa por A y C justamente en estos puntos; por lo tanto $m\angle BAO = m\angle BCO = 90°$, donde O es el centro de la circunferencia.



Luego el ⊿BHA es notable de 37° y 53°, entonces el ⊿AHO también lo es:
$\therefore AO = 5k$
$AH = 4k$
Pero $AH = 4k = 6 \Rightarrow k = 3/2$
Reemplazando en $AO = 5k = n$
$\Rightarrow R = 5(3/2) \Rightarrow R = 15/2$
Finalmente: $L_C = 2\pi(R) \Rightarrow L_C = 15\pi$ cm

Clave B

7.



Trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, asignamos:
$m\angle APE = \alpha \wedge m\angle BPM = \beta$; del gráfico:
$m\angle AOB = 102°$, luego el ΔAOB es isósceles ($OA = OB$) $\Rightarrow m\angle OAB = m\angle OBA = 51°$

Luego en los triángulos rectángulos AEM y BHN.
$m\angle AME = m\angle BNH = 51°$
Vemos que el ΔMPN es isósceles y $\overline{PF}$ es su mediatriz $\therefore m\angle EPF = m\angle HPF = 39°$

Ahora los cuadriláteros AEFP y BHFP son inscriptibles:

$m\angle APE = m\angle AFE = \alpha \wedge m\angle BPH = m\angle BFH = \beta$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{APB} = 360°$
$\Rightarrow (\alpha + \beta + 39° + 39°) + 102° = 360°$
$(\alpha + \beta) + 51° + 78° = 180°$
$\alpha + \beta = 51°$ ...(I)

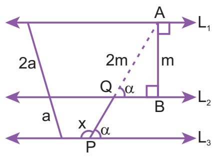
Finalmente vemos que:
$\alpha + \beta + x = 180°$

Reemplazando de (I):
$51° + x = 180° \Rightarrow x = 129°$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 65) Unidad 3

1.

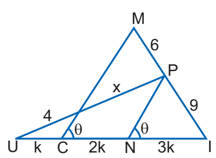


Del dato:
$PQ = AB = m$
Por el teorema de Thales:
$\frac{2a}{a} = \frac{AQ}{PQ} = \frac{AQ}{m}$

$\Rightarrow AQ = 2m$
Entonces:
$\alpha = 30°$
Por lo tanto:
$x + \alpha = 180°$
$x + 30° = 180°$
$\therefore x = 150°$

Clave C

2.



Por el teorema de Thales:
$\frac{NI}{CN} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow NI = 3k \wedge CN = 2k$

Del dato:
$UN = NI$
$UC + CN = NI$
$UC + 2k = 3k \Rightarrow UC = k$
Por el teorema de Thales:
$\frac{k}{2k} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 8$

Clave E

3. Por el teorema de la bisectriz interior:

$\frac{AB}{AD} = \frac{x+6}{x+2}$ ... (1)

Del dato:
$2AB = 5AD \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{5}{2}$ ... (2)
Igualando (1) y (2):
$\frac{x+6}{x+2} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 2x + 12 = 5x + 10 \Rightarrow 2 = 3x$

$\therefore x = \frac{2}{3}$

Clave A

4. Por el teorema de Thales:

$\frac{4}{a} = \frac{6}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{6}$ ...(1)

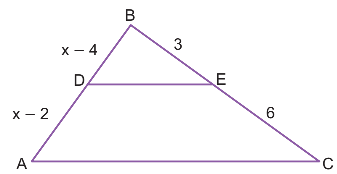
$\frac{a}{2} = \frac{b}{x+2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{x+2}$ ...(2)

Igualando (1) y (2):
$\frac{4}{6} = \frac{2}{x+2} \Rightarrow 4x + 8 = 12$

$\therefore x = 1$

Clave E

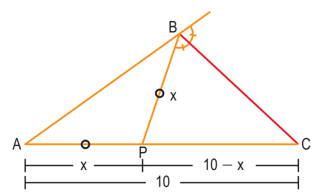
5.



Por el teorema de Thales:
$\frac{x-4}{x-2} = \frac{3}{6}$

$2x - 8 = x - 2$
$\therefore x = 6$

6. De los datos:



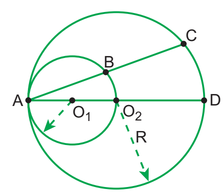
Por el teorema de la bisectriz exterior:

$\frac{x}{10} = \frac{10-x}{10}$

$2x = 10$
$\therefore x = 5$

Clave B

7. Del gráfico:



$AO_2 = O_2D = R$
Por teorema:
$\frac{AB}{BC} = \frac{AO_2}{O_2D} = \frac{R}{R}$

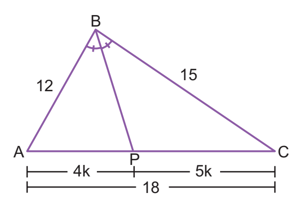
$\therefore \frac{AB}{BC} = 1$

Clave C

8. Por el teorema de la bisectriz interior:

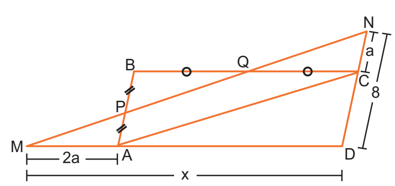
$\frac{12}{AP} = \frac{15}{PC} \Rightarrow \frac{PC}{AP} = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow AP = 4k \wedge PC = 5k$
Luego:
$4k + 5k = 18$
$9k = 18$
$k = 2$
$\therefore ab = (4k)(5k)$
$ab = (8)(10) \Rightarrow ab = 80$



Clave A

9.



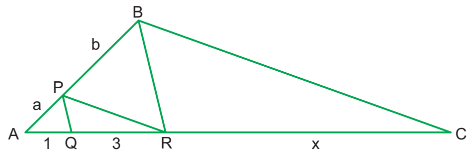
Del gráfico: $\overline{PQ} // \overline{AC}$

Por el teorema de Thales:

$\frac{8}{a} = \frac{x}{2a}$ $\therefore$ $x = 16$

Clave D

10. Por el teorema de Thales:



$\frac{a}{b} = \frac{1}{3} \wedge \frac{a}{b} = \frac{4}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{x}$

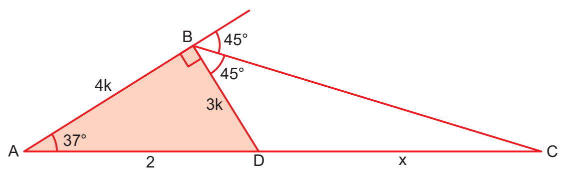
$\therefore$ $x = 12$

Clave C

11. De los datos: $m\angle ABD = 90°$

El ⊿ ABD es notable de 37° y 53°:

$BD = 3k \wedge AB = 4k$



Por el teorema de la bisectriz exterior:

$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{3k}{4k} = \frac{x}{2+x}$

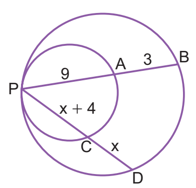
$\frac{3}{4} = \frac{x}{2+x}$

$6 + 3x = 4x$

$\therefore$ $x = 6$

Clave E

12. De los datos, se cumple:



$\frac{x+4}{x} = \frac{9}{3}$

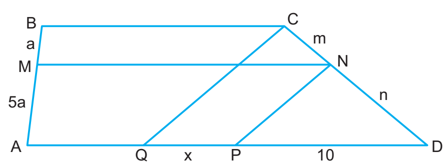
$x + 4 = 3x$

$2x = 4$

$\therefore$ $x = 2$

Clave B

13. Por el teorema de Thales:



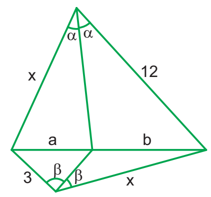
$\frac{m}{n} = \frac{a}{5a} \wedge \frac{n}{m} = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{x}{10}$

Luego:

$\frac{x}{10} = \frac{1}{5}$ $\therefore$ $x = 2$

Clave E

14. Por el teorema de la bisectriz interior:



$\frac{x}{a} = \frac{12}{b} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{a}{b}$ ...(1)

$\frac{3}{a} = \frac{x}{b} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{a}{b}$ ...(2)

De (1) y (2):

$\frac{x}{12} = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 = 36$

$\therefore$ $x = 6$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 67) Unidad 3

Comunicación matemática

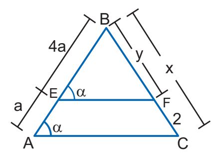
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



$\frac{4a}{a} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 8$

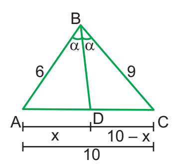
Piden x:

$x = y + 2 = 10$

$\therefore x = 10$

Clave B

5.

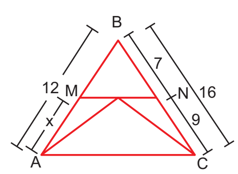


$\frac{6}{x} = \frac{9}{10-x} \Rightarrow 20 - 2x = 3x$

$\therefore$ $x = 4$

Clave A

6.



$\frac{12}{x} = \frac{16}{9} \Rightarrow 4x = 27$

$\therefore$ $x = \frac{27}{4}$

Clave D

7. Del gráfico:

$$\frac{15}{12} = \frac{3+x}{x}$$

$15x = 36 + 12x$
$3x = 36$
$x = 12$

Clave E

8. Del gráfico:

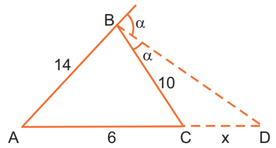
$$\frac{x+3}{8} = \frac{9}{x-3}$$

Resolviendo:
$x^2 - 9 = 72 \Rightarrow x^2 = 81$
$\therefore\ x = 9$

Clave D

Resolución de problemas

9.

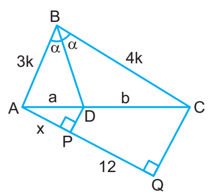


$\dfrac{14}{10} = \dfrac{6+x}{x} \Rightarrow 7x = 30 + 5x$

$2x = 30 \Rightarrow x = 15$

Clave C

10.



$\dfrac{a}{b} = \dfrac{3k}{4k} \quad \wedge \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{12}$

$\Rightarrow \dfrac{3k}{4k} = \dfrac{x}{12}$

$\therefore\ x = 9$

Clave E

11. De la figura:

$\dfrac{n}{m} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow n = 3k;\ m = 4k$

Además:

$3k + 4k = 7 \Rightarrow k = 1$
Luego: $n = 3;\ m = 4$
$\therefore\ m - n = 1$

Clave C

12. Del gráfico:

$\dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}$ ...(1)

$4(AC) = 3(PR) \Rightarrow \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{3}{4}$ ...(2)

De (1) y (2):

$\dfrac{AB}{PQ} + \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \dfrac{AB}{PQ} + \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{3}{2}$

Clave D

Nivel 2 (página 68) Unidad 3

Comunicación matemática

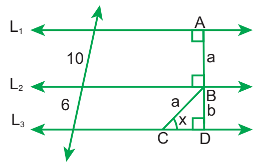
13.

14.

15.

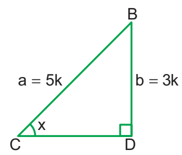
Razonamiento y demostración

16.



$\dfrac{a}{b} = \dfrac{10}{6} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow a = 5k \quad \wedge \quad b = 3k$

En el triángulo BCD:



$\Rightarrow x = 37°$

Clave C

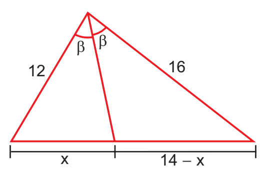
17. Del gráfico:

$\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{4}{6}$

$6x = 4x + 4$
$2x = 4$

Clave B

18. De la figura:



Por propiedad:

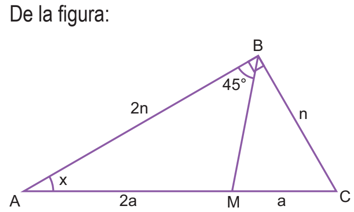
$\dfrac{12}{x} = \dfrac{16}{14-x}$

$\dfrac{3}{x} = \dfrac{4}{14-x}$

$42 - 3x = 4x$
$42 = 7x \Rightarrow x = 6$

Clave C

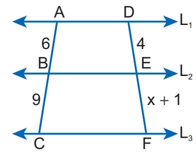
19. De la figura:



Entonces: $x = \dfrac{53°}{2}$

Clave C

20.



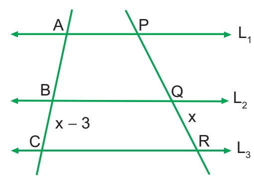
$\dfrac{6}{9} = \dfrac{4}{x+1}$

$x + 1 = 6 \qquad \therefore\ x = 5$

Clave C

Resolución de problemas

21. En el gráfico:



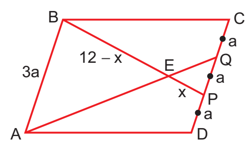
$5AC = 3PR \Rightarrow \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{AC}{PR} = \dfrac{x-3}{x} \Rightarrow \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{3}{5}$

Luego:
$5x - 15 = 3x \Rightarrow 2x = 15 \quad \therefore x = 7{,}5$

Clave C

22. Del gráfico:



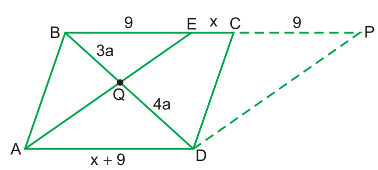
Entonces:

$\dfrac{AB}{QP} = \dfrac{12-x}{x} \Rightarrow \dfrac{3a}{a} = \dfrac{12-x}{x}$

$\Rightarrow 3x = 12 - x \Rightarrow 4x = 12$
$\therefore x = 3$

Clave D

23. De acuerdo al enunciado:



Trazamos $\overline{DP}$ tal que $\overline{DP} \parallel \overline{AE}$.

Entonces:

$\dfrac{3a}{9} = \dfrac{4a}{x+9}$

$3x + 27 = 36$
$3x = 9$
$x = 3$

$\therefore EC = 3$

Clave B

24. Si: $AR = x \Rightarrow RC = 12 - x$

Por el teorema de la bisectriz:

$$\frac{10}{x} = \frac{5}{12 - x}$$

$$120 - 10x = 5x$$
$$120 = 15x \Rightarrow x = 8$$

Entonces:

$AR = 8$; $RC = 4$

Luego:

$AR \times RC = 8 \times 4 = 32$

Clave A

Nivel 3 (página 69) Unidad 3

25.

26.

27.

Razonamiento y demostración

28. De la figura:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{2}{1} \\ \\ \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{x}{3} \end{array}\right\} \qquad \frac{2}{1} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6$$

Clave A

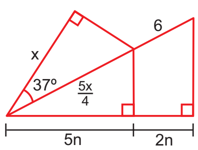
29. De la figura:

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore\ x = \frac{10}{3}$$

Clave C

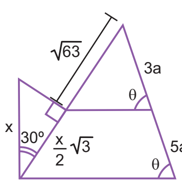
30.



$$\frac{5n}{2n} = \frac{\frac{5x}{4}}{6}$$
$$\therefore x = 12$$

Clave A

31.



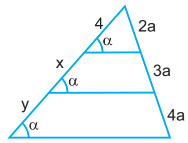
$$\frac{6\sqrt{3}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{3a}{5a}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{5}$$

$$x = 20$$

Clave B

32.



$$\frac{4}{x} = \frac{2a}{3a} \qquad \frac{x}{y} = \frac{3a}{4a}$$

$$x = 6 \qquad \frac{6}{y} = \frac{3}{4}$$

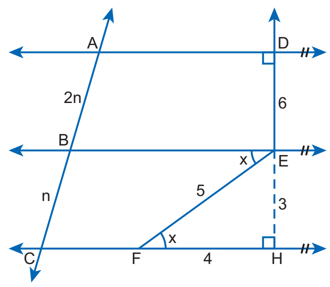
$$y = 8$$

$$\therefore\ y - x = 2$$

Clave B

Resolución de problemas

33.



Por el teorema de Thales:

$$\frac{2n}{n} = \frac{6}{EH} \Rightarrow EH = 3$$

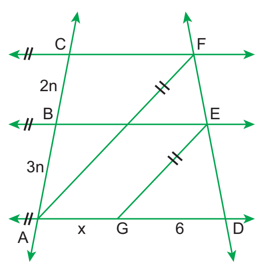
Por el teorema de Pitágoras: $FH = 4$

El ⊿EHF resulta ser notable de 37° y 53°:

$\therefore x = 37°$

Clave C

34.



Por el teorema de Tales:

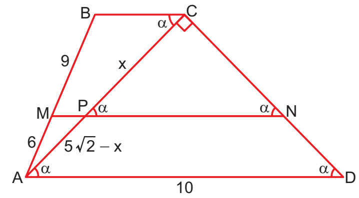
$$\frac{FE}{ED} = \frac{2n}{3n} \wedge \frac{FE}{ED} = \frac{x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ x = 4$$

Clave A

35.



Del gráfico:

El ⊿ACD resulta ser notable de 45°.

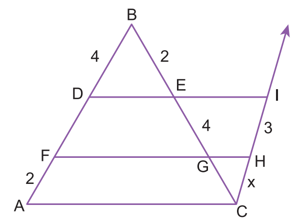
Entonces: $AC = CD = 5\sqrt{2}$

Por el teorema de Thales:

$$\frac{9}{6} = \frac{x}{5\sqrt{2} - x} \Rightarrow 45\sqrt{2} - 9x = 6x$$
$$45\sqrt{2} = 15x$$
$$\therefore x = 3\sqrt{2}$$

Clave D

36.



Por el teorema de Thales:

$$\frac{BD}{FA} = \frac{BE}{GC} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{GC} \Rightarrow GC = 1$$

Luego:

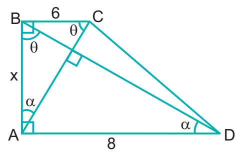
$$\frac{EG}{GC} = \frac{IH}{HC} \Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{3}{x}$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}$$

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 71) Unidad 3

1.



$\Delta DAB \sim \Delta ABC$

$\frac{x}{8} = \frac{6}{x}$

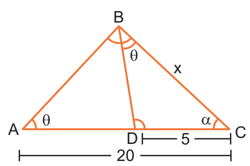
$\Rightarrow x^2 = 48$

$x = \sqrt{48}$

$\therefore x = 4\sqrt{3}$

Clave E

2.



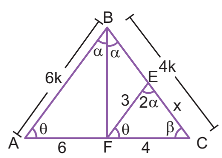
Si $\Delta ABC \sim \Delta BCD$:

$\frac{x}{20} = \frac{5}{x} \Rightarrow x^2 = 100$

$\therefore x = 10$

Clave B

3.



Por el teorema de la bisectriz interior:

$\frac{AB}{6} = \frac{BC}{4} \Rightarrow 4 \,.\, AB = 6.BC$

$AB = 6k$

$BC = 4k$

$\Delta ABC \sim \Delta FEC$

$\frac{6k}{4k} = \frac{3}{x}$

$\therefore x = 2$

Clave C

4. De la figura: $\Delta BCA \sim \Delta DCB$

$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$

Entonces: $\frac{x}{12} = \frac{9}{x}$

$x^2 = 12 \,.\, 9 \Rightarrow x^2 = 108 \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$

Clave C

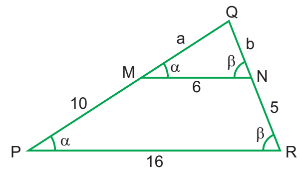
5. Se nota que: $\Delta RAS \sim \Delta BAC$

$\frac{AR}{AB} = \frac{RS}{BC}$

$\frac{8}{11} = \frac{RS}{12} \quad \Rightarrow RS = \frac{96}{11}$

Clave A

6. Según el enunciado:



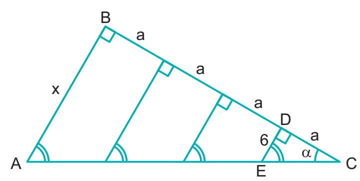
$\Delta PQR \sim \Delta MQN$: $\frac{a}{a+10} = \frac{b}{b+5} = \frac{6}{16}$

Resolviendo: $a = 6$; $b = 3$

Luego: $PQ + QR = 16 + 8 = 24$

Clave B

7. De la figura:

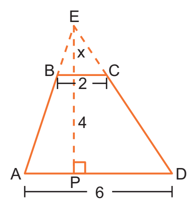


Se nota que: $\Delta ABC \sim \Delta EDC$

$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{4a}{a} \Rightarrow x = 24$

Clave E

8. Según el enunciado:



Se observa que:

$\Delta AED \sim \Delta BEC$

$\Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{x}{x+4} \Rightarrow 2x + 8 = 6x$

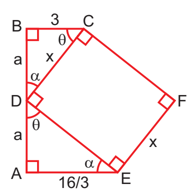
$8 = 4x$

$\Rightarrow x = 2$

Luego: $EP = x + 4 = 2 + 4 = 6$

Clave D

9. Del gráfico:



$\Delta DBC \sim \Delta EAD$

$\frac{a}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{a}$

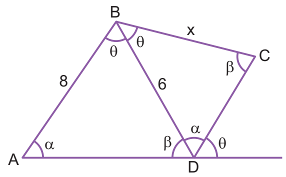
$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

El ΔDBC es notable:

$\Rightarrow x = 5$

Clave B

10.



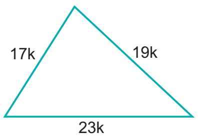
$\Delta ABD \sim \Delta DBC$

$\frac{6}{8} = \frac{x}{6}$

$x = 4{,}5$

Clave B

11.



Dato:

$17k + 19k + 23k = 177$

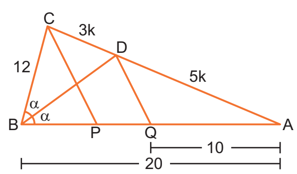
$59k = 177$

$k = 3$

$\Rightarrow$ El menor lado es: $17(3) = 51$

Clave E

12.



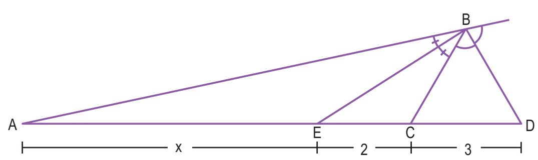
Por teorema de la bisectriz interior:

$\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{12}{CD} = \frac{20}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{5}{8}$

$\Delta AQD \sim \Delta APC$: $\frac{AQ}{AP} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{10}{AP} = \frac{5}{8} \therefore AP = 16$

Clave B

13.



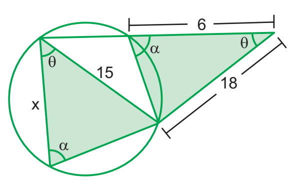
A; E; C y D forman un haz armónico:

$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+5}{3}$

$x = 10$

Clave D

14.



Triángulos sombreados semejantes, luego:

$x = 5$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 73) Unidad 3

Comunicación matemática

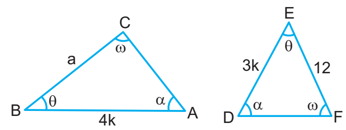
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.

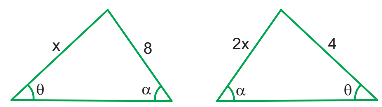


$3a = 4 \times 12$

$a = 16$

Clave C

5.

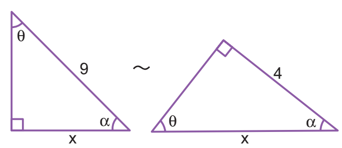


$\frac{x}{8} = \frac{4}{2x} \Rightarrow x^2 = 16$

$\therefore x = 4$

Clave E

6.



$\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$

$x \cdot x = 9 \cdot 4$

$x^2 = 36$

$\Rightarrow x = 6$

Clave C

7. De los triángulos semejantes:

$\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \Rightarrow x^2 = 36$

$\therefore x = 6$

Clave A

Resolución de problemas

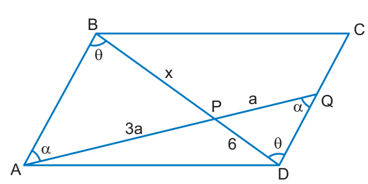
8. De la figura: $\Delta ACB \sim \Delta QCP$

$\frac{6}{x} = \frac{10}{24+6} \Rightarrow x = \frac{6 \times 30}{10}$

$\therefore x = 18$

Clave E

9.



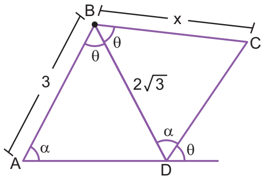
$\Delta ABP \sim \Delta QDP$:

$\frac{x}{6} = \frac{3a}{a}$

$x = 18$

Clave D

10.



Del gráfico: $\triangle ABD \sim \triangle DBC$

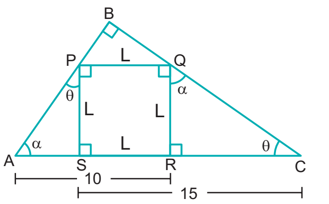
$\dfrac{BD}{x} = \dfrac{3}{BD}$; $BD = 2\sqrt{3}$

$\dfrac{2\sqrt{3}}{x} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}}$

$\therefore x = 4$ m

Clave D

11.



Del gráfico: $\triangle ASP \sim \triangle QRC$

$\dfrac{L}{RC} = \dfrac{AS}{L}$

$\Rightarrow \dfrac{L}{15-L} = \dfrac{10-L}{L}$

$L^2 = (15-L)(10-L)$

$L^2 = 150 - 25L + L^2$

$25L = 150$

$L = 6$

Clave A

Nivel 2 (página 74) Unidad 3

Comunicación matemática

12.

13.

14.

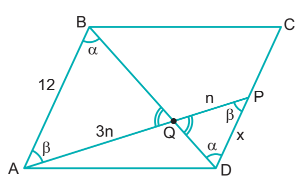
Razonamiento y demostración

15. Se nota que: $\Delta ABC \sim \Delta PBQ$

$\dfrac{20}{PQ} = \dfrac{8}{2} \Rightarrow PQ = \dfrac{40}{8} = 5$

Clave A

16. De la figura:

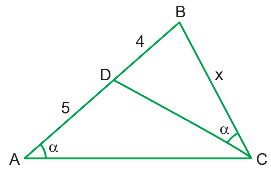


$\Delta DQP \sim \Delta BQA$:

$\dfrac{x}{12} = \dfrac{n}{3n} \Rightarrow x = \dfrac{12n}{3n} = 4$

Clave B

17. De la figura:



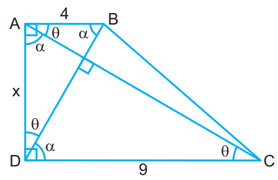
$\Delta ABC \sim \Delta CBD$:

$\dfrac{x}{4} = \dfrac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36$

$\therefore x = 6$

Clave C

18. Del gráfico:



$\Delta ADC \sim \Delta BAD$:

$\dfrac{x}{9} = \dfrac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 36$

$\therefore x = 6$

Clave B

19. Se observa que:

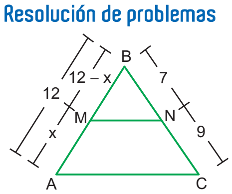
$\Delta ABC \sim \Delta PBQ$:

$\dfrac{x}{7} = \dfrac{4}{14} \Rightarrow x = \dfrac{7 \cdot 4}{14} = 2$

Clave B

Resolución de problemas

20.



$\dfrac{12-x}{x} = \dfrac{7}{9}$

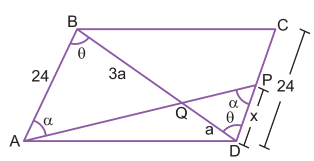
$108 - 9x = 7x$

$108 = 16x$

$\dfrac{27}{4} = x$

Clave D

21.



$\Delta ABQ \sim \Delta PDQ$:

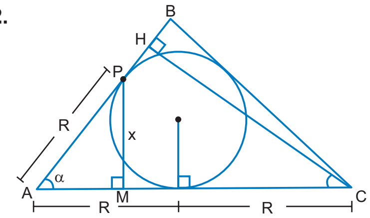
$\dfrac{24}{3a} = \dfrac{x}{a}$

$24 = 3x$

$x = 8$

Clave C

22.



$\Delta AMP \sim \Delta AHC$:

$\dfrac{x}{R} = \dfrac{8}{2R}$

$x = 4$

Clave A

Nivel 3 (página 75) Unidad 3

Comunicación matemática

23.

24.

25.

Razonamiento y demostración

26. Por propiedad:

$x^2 = 4 \,.\, 12 \Rightarrow x^2 = 48$

$\therefore x = 4\sqrt{3}$

Clave C

27. Se nota que:

$\Delta APQ \sim \Delta RSC$

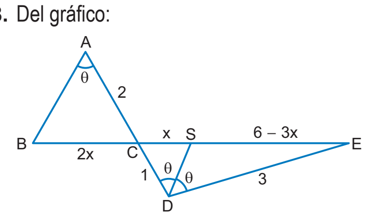
$\dfrac{QP}{SC} = \dfrac{AP}{RS} \Rightarrow \dfrac{x}{9} = \dfrac{16}{x}$

$x^2 = 9 \,.\, 16$

$\therefore x = 3 \,.\, 4 = 12$

Clave C

28. Del gráfico:



$\Delta BCA \sim \Delta DCS$:

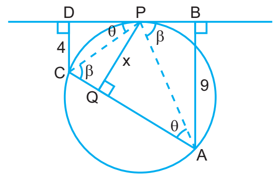
$\dfrac{AC}{CS} = \dfrac{2}{1}$

En ΔCDE (prop. de la bisectriz):

$\dfrac{x}{1} = \dfrac{6-3x}{3} \Rightarrow x = 1$

Clave B

29. De la figura:



$$\left.\begin{array}{l}\triangle CQP \sim \triangle PBA\text{: } \dfrac{x}{9} = \dfrac{CP}{PA} \\[2ex] \triangle CDP \sim \triangle PQA\text{: } \dfrac{4}{x} = \dfrac{CP}{PA}\end{array}\right\} \dfrac{x}{9} = \dfrac{4}{x}$$

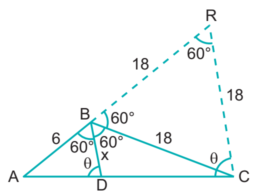
$x^2 = 36$

$\therefore\ x = 6$

Clave C

Resolución de problemas

30. Según el enunciado:



Se construye exteriormente el $\triangle BRC$ (equilátero):

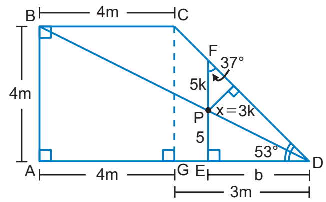
$\triangle ABD \sim \triangle ARC$

$\dfrac{x}{18} = \dfrac{6}{6+18} \Rightarrow x = \dfrac{18 \times 6}{24}$

$\therefore x = 4{,}5$

Clave A

31.



$\triangle PED \sim \triangle BAD$:

$\dfrac{b}{7} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow b = \dfrac{35}{4}$

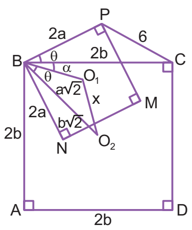
En el $\triangle FED$:

$\dfrac{5k+5}{b} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow k = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow x = 3k = 3 \cdot \dfrac{4}{3} = 4$

Clave E

32.

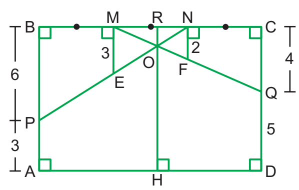


$\triangle BO_1O_2 \sim \triangle BPC$:

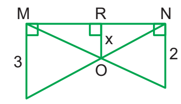
$\dfrac{x}{a\sqrt{2}} = \dfrac{6}{2a} \quad \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

Clave C

33.



Del gráfico tenemos:



$\Rightarrow x = \dfrac{3 \cdot 2}{3+2}$

$x = 1{,}2$

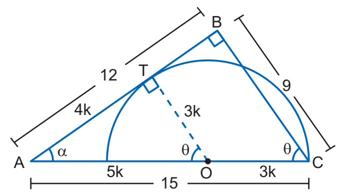
Luego:

$OH = CD - RO = 9 - 1{,}2 = 7{,}8$

$\therefore\ OH = 7{,}8$ m

Clave D

34.



Del gráfico: $\triangle ABC \sim \triangle ATO$

$\Rightarrow 8k = 15$

$k = \dfrac{15}{8}$

Luego:

$TB = 12 - 4k$

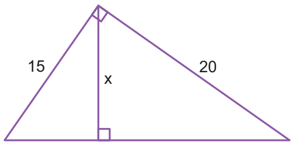
$TB = 12 - 4\left(\dfrac{15}{8}\right) = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ TB = 4{,}5$

Clave E

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 77) Unidad 3

1.



Por propiedad:

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}=\frac{20^2+15^2}{15^2.20^2}$$

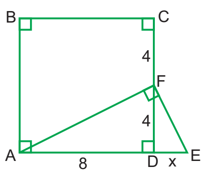
$$x^2=\frac{15^2.20^2}{400+225}=\frac{15^2.20^2}{625}$$

$$x=\frac{15\,.\,20}{25}$$

$\therefore x=12$

Clave D

2.

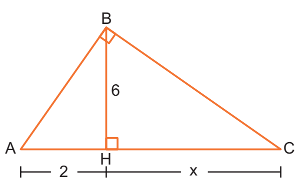


$4^2=8(x)$

$x=2$

Clave E

3.



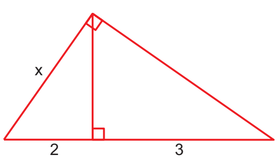
$6^2=2(x)$

$36=2x$

$x=18$

Clave D

4.



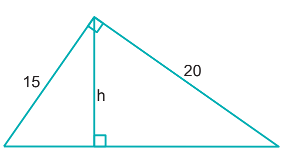
En el gráfico, se cumple:

$x^2=2(2+3)=10$

$\therefore x=\sqrt{10}$

Clave B

5.



$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}=\frac{20^2+15^2}{15^2\cdot 20^2}$$

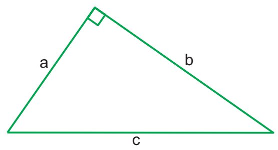
$$\frac{1}{h^2}=\frac{625}{15^2\cdot 20^2}\Rightarrow h^2=\frac{15^2\cdot 20^2}{625}$$

$$h=\sqrt{\frac{15^2\cdot 20^2}{625}}=\frac{15\cdot 20}{25}$$

$h=12$

Clave A

6.



Datos:

$a^2+b^2+c^2=200$

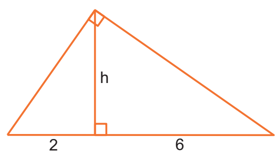
$c^2+c^2=200$

$c^2=100$

$\therefore c=10$

Clave A

7.



$h^2=2\,.\,6$

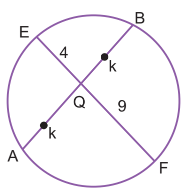
$h^2=12$

$h=\sqrt{12}$

$\therefore\ h=2\sqrt{3}$

Clave B

8.



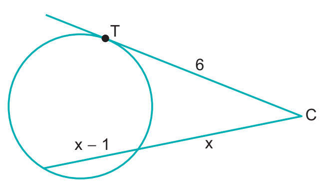
Por el teorema de las cuerdas:

$k^2=4\,.\,9\Rightarrow k=6$

$\therefore AB=\ 2k=12$

Clave C

9.



Por el teorema de la tangente:

$6^2=x(2x-1)$

$36=2x^2-x\Rightarrow 0=2x^2-x-36$

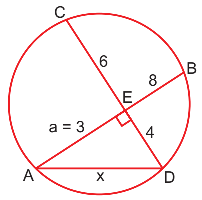
$$\begin{array}{ccc} 2x & & -9 \\ x & & 4 \end{array}$$

$\Rightarrow 2x=9$

$\therefore x=4{,}5$

Clave B

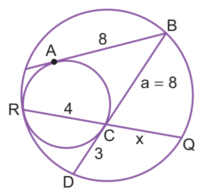
10.



Por el teorema de las cuerdas:
$6 . 4 = a . 8$
$24 = 8 . a \Rightarrow a = 3$
En el ⊿AED:
$x^2 = 3^2 + 4^2$
$\therefore x = 5$

Clave E

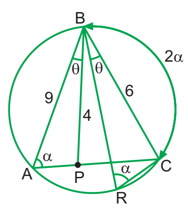
11.



$AB = BC = 8$
Por el teorema de las cuerdas:
$4 . x = 3 . 8 \Rightarrow 4x = 24$
$\therefore x = 6$

Clave B

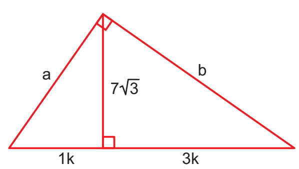
12.



Como $\overline{BP}$ y $\overline{BR}$ son segmentos isogonales:
$\Rightarrow m\angle ABP = m\angle RBC = \theta$
$\Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle RBC$
$\frac{4}{6} = \frac{9}{BR}$
$4BR = 54$
$BR = 13{,}5$

Clave B

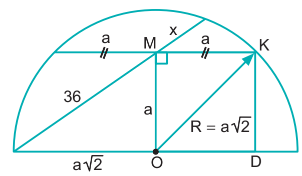
13.



Por propiedad:
$(7\sqrt{3})^2 = k(3k)$
$\Rightarrow 7 = k$
Luego:
$a^2 = (4k)(k) = 4k^2 = 196 \Rightarrow a = 14$
$b^2 = (4k)(3k) = 12k^2 = 588 \Rightarrow b = 14\sqrt{3}$
$\therefore$ El menor cateto es: 14

Clave A

14.



Por Pitágoras:
$(36)^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$
$1296 = 3a^2 \Rightarrow a^2 = 432$
Por el teorema de las cuerdas:
$a^2 = 36x$
$432 = 36x$
$\therefore x = 12$

Clave A

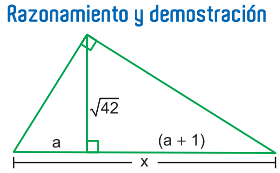
PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 79) Unidad 3

Comunicación matemática

1.
2.
3.

Razonamiento y demostración

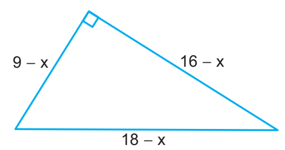
4.



$(\sqrt{42})^2 = (a + 1)\,a$
$42 = a^2 + a$
$a^2 + a - 42 = 0$
$a = 6 \ \vee \ a = -7$
Piden x:
$x = a + a + 1$
$\Rightarrow x = 13$

Clave C

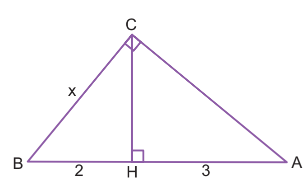
5.



Por el teorema de Pitágoras:
$(18 - x)^2 = (9 - x)^2 + (16 - x)^2$
$324 - 36x = 337 - 50x + x^2$
$0 = x^2 - 14x + 13$
$\Rightarrow x = 1$

Clave B

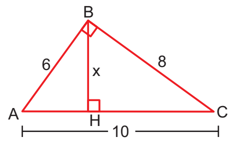
6.



$x^2 = 2(5)$
$x = \sqrt{10}$

Clave A

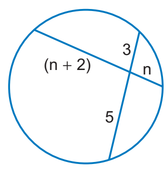
7.



$10(x) = 6(8)$
$x = 4,8$

Clave E

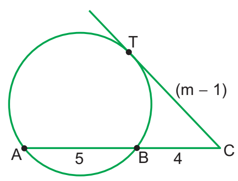
8.



Por el teorema de las cuerdas:
$(n + 2)(n) = 3 . 5$
$(n + 2)n = 3(3 + 2) \Rightarrow n = 3$
Piden:
$n + 1 = 3 + 1 = 4$
$\therefore n + 1 = 4$

Clave B

9.

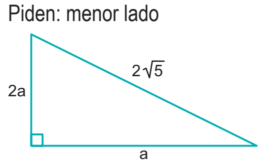


Por el teorema de la tangente:
$(m - 1)^2 = (9)(4) = 36$
$m - 1 = 6$
$\therefore\ m = 7$

Clave A

Resolución de problemas

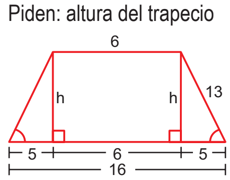
10. Piden: menor lado



Por el teorema de Pitágoras:
$4a^2 + a^2 = (2\sqrt{5})^2$
$5a^2 = 4 . 5$
$a = 2$
Por lo tanto: el menor lado es: $a = 2$

Clave A

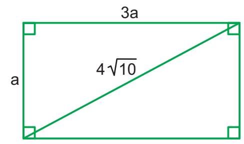
11. Piden: altura del trapecio



Por el teorema de Pitágoras:
$h^2 + 5^2 = 13^2$
$h^2 = 144$
$\therefore\ h = 12$

Clave B

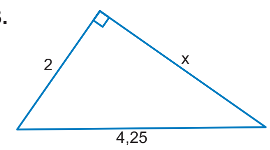
12. Piden: perímetro



Por el teorema de Pitágoras:
$a^2 + 9a^2 = 16 . 10$
$10a^2 = 16 . 10$
$a = 4$
Por lo tanto:
Perímetro $= 8(a) = 32$

Clave E

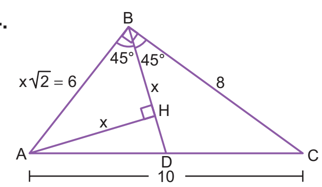
13.



$$x^2 + 2^2 = \left(\frac{17}{4}\right)^2$$
$$x^2 + 4 = \frac{289}{16}$$
$$x^2 = \frac{225}{16}$$
$$\therefore x = \frac{15}{4} = 3,75$$

Clave D

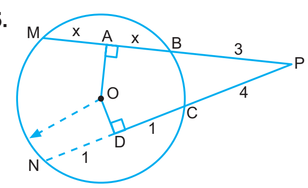
14.



Del gráfico:
$x\sqrt{2} = 6$
$$x = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$
$\therefore\ x = 3\sqrt{2}$

Clave D

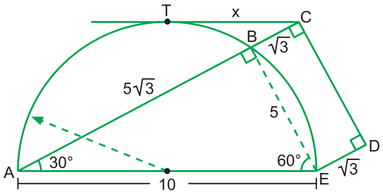
15.



Por el teorema de la secantes:
$(2x + 3)(3) = (6)(4)$
$2x + 3 = 8$
$2x = 5$
$$\therefore x = \frac{5}{2}$$

Clave E

16.



El ◺ ABE es notable de 30° y 60°.

Entonces: $BE = 5 \wedge AB = 5\sqrt{3}$

Por el teorema de la tangente:

$x^2 = (6\sqrt{3})(\sqrt{3})$

$x^2 = 6 \,.\, 3 = 18$

$\therefore x = 3\sqrt{2}$

Clave B

Nivel 2 (página 80) Unidad 3

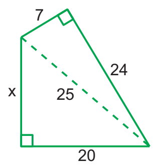
Comunicación matemática

17.

18.

Razonamiento y demostración

19. Piden: x



Por el teorema de Pitágoras:

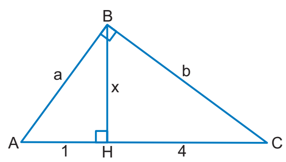
$x^2 + 20^2 = 25^2$

$x^2 = 225$

$\therefore\ x = 15$

Clave C

20.



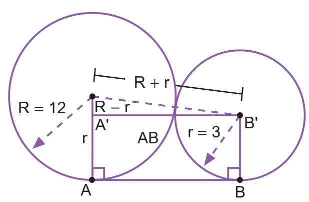
$a^2 = 1.5$

$b^2 = 4.5$

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

Clave B

21.



$(A'B')^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$

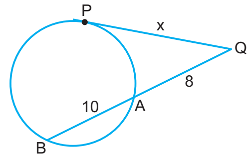
$(A'B')^2 = 4Rr$

Del gráfico: A'B' = AB

$\therefore AB = 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{12(3)} = 12$

Clave A

22.

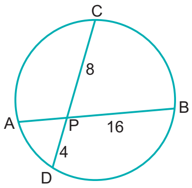


$x^2 = 8(18)$

$x = 12$

Clave E

23.

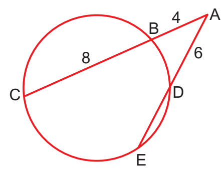


$AP(16) = 8(4)$

$AP = 2$

Clave D

24.



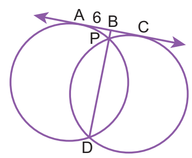
$4(12) = 6(6 + ED)$

$8 = 6 + ED$

$ED = 2$

Clave D

25.



$6^2 = (BP)(BD)$

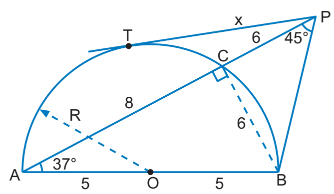
$(BC)^2 = (BP)(BD)$

$\Rightarrow (BC)^2 = 6^2$

$BC = 6$

Clave C

26.



Por dato: $R = 5 \Rightarrow AB = 10$

El ◺ ACB es notable de 37° y 53°:

$\Rightarrow CB = 6 \wedge AC = 8$

El ◺ PCB es notable de 45°.

$\Rightarrow CB = CP = 6$

Por el teorema de la tangente:

$x^2 = (8 + 6)(6) = 14 \,.\, 6$

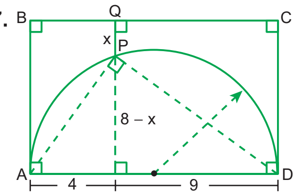
$x^2 = 4 \,.\, 21$

$\therefore x = 2\sqrt{21}$

Clave D

Resolución de problemas

27.



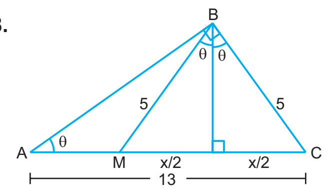
$(8 - x)^2 = 4 \,.\, 9$

$(8 - x)^2 = 6^2$

$x = 2$

Clave D

28.



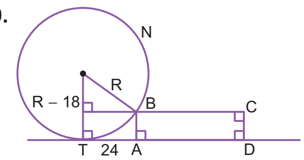
Por propiedad:

$5^2 = \frac{x}{2}(13)$

$x = \frac{50}{13}$

Clave E

29.



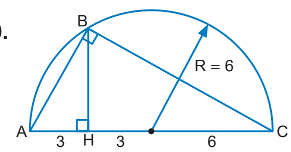
$(R - 18)^2 + 24^2 = R^2$

$36R = 900$

$R = 25$

Clave D

30.

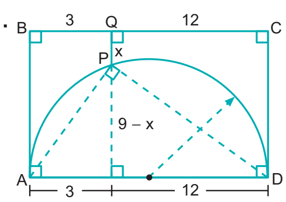


$(AB)^2 = 3(12)$

$AB = 6$ m

Clave C

31.

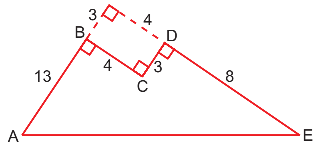


$(9 - x)^2 = 3(12)$

$x = 3$

Clave C

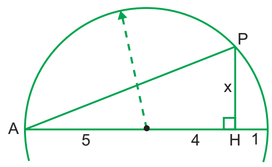
32.



$(AE)^2 = 16^2 + 12^2$
$(AE)^2 = (20)^2$
$AE = 20$

Clave D

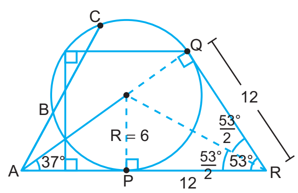
33.



$x^2 = 9(1)$
$x = 3$

Clave C

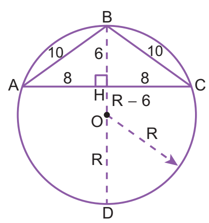
34.



$AP = 4(2) = 8$
$(AB)(AC) = (AP)^2$
$\therefore (AB)(AC) = 64$

Clave B

35.



En el $\triangle$ AHB por el teorema de Pitágoras: $BH = 6$
Por el teorema de las cuerdas:
$(AH)(HC) = (BH)(HD)$
$(8)(8) = (6)(2R - 6)$
$\frac{32}{3} = 2R - 6$
$\Rightarrow 2R = \frac{50}{3}$
$\therefore R = \frac{25}{3}$

Clave C

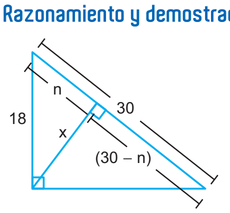
Nivel 3 (página 82) Unidad 3

Comunicación matemática

36.
37.

Razonamiento y demostración

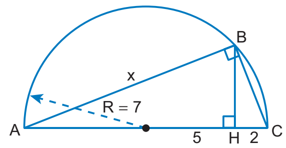
38.



Por propiedad:
$x^2 = (30 - n)n$ ...(1)
También:
$18^2 = n(30)$
$10,8 = n$ ...(2)
Reemplazando (2) en (1):
$x^2 = (30 - 10,8)(10,8)$
$\therefore x = 14,4$

Clave B

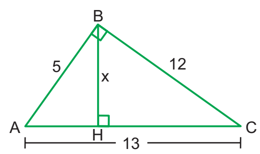
39.



$x^2 = (7 + 5 + 2)(7 + 5)$
$x^2 = 42(4)$
$x = 2\sqrt{42}$

Clave B

40.

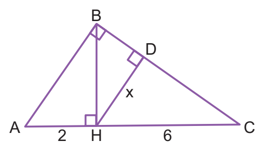


Por el teorema de Pitágoras: $BC = 12$

$5(12) = 13x$
$x = \frac{60}{13}$

Clave A

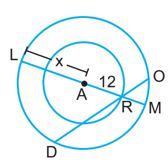
41.



En el $\triangle$ ABC:
$(BH)^2 = 2(6)$
$(BH)^2 = 12$
En el $\triangle$ BHC:
$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(BH)^2} + \frac{1}{6^2}$
$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{9}$
$x = 3$ m

Clave C

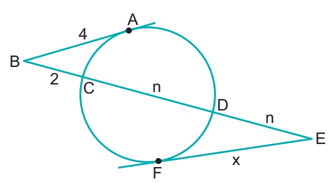
42.



$(LR)(RM) = DR(RO)$
$(x + 12)(x - 12) = DR(RO)$
$x^2 - 12^2 = 25$
$x^2 = 169$
$x = 13$

Clave C

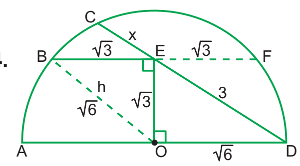
43.



Por el teorema de la tangente:
$4^2 = (n + 2)(2)$
$8 = n + 2$
$\Rightarrow n = 6$
Por el teorema de la tangente:
$x^2 = (2n)(n)$
$x^2 = 2n^2$
$\Rightarrow x = n\sqrt{2}$
$\therefore x = 6\sqrt{2}$

Clave B

44.

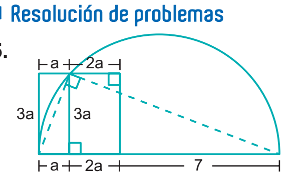


En el $\triangle$ BEO: $BO = (\sqrt{3})\sqrt{2} = \sqrt{6}$
$BE \perp OE \Rightarrow EF = BE = \sqrt{3}$
En el $\triangle$ EOD:
$(ED)^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2$
$\Rightarrow ED = 3$
Por el teorema de cuerdas:
$3(x) = (\sqrt{3})(\sqrt{3})$
$\therefore x = 1$

Clave B

Resolución de problemas

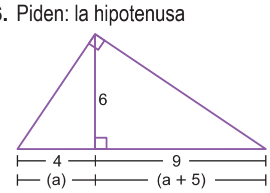
45.



Por propiedad:
$(3a)^2 = a(2a + 7)$
$9a^2 = a(2a + 7)$
$9a = 2a + 7$
$7a = 7 \Rightarrow a = 1$
Por lo tanto:
La longitud del cuadrado es: $3a = 3$

Clave D

46. Piden: la hipotenusa

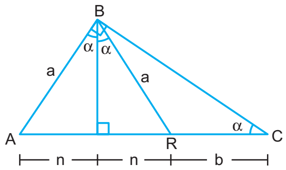


Por propiedad:
$6^2 = (a + 5)a$
$0 = a^2 + 5a - 36$
a $\quad$ +9
a $\quad$ –4
$a - 4 = 0 \quad \vee \quad a + 9 = 0$
$a = 4 \quad \vee \quad a = -9$
(no cumple)
Por lo tanto:
La longitud de la hipotenusa es:
$2a + 5 = 13$

Clave D

47. Piden: AB

Dato: (AR)(AC) = 200



Del gráfico:

$(AR)(AC) = 200 = 2n(2n + b)$

$\Rightarrow 100 = n(2n + b)$ ...(1)

Por propiedad:

$a^2 = n(2n + b)$ ...(2)

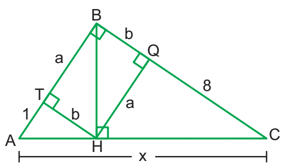
De (1) en (2):

$a^2 = 100$

$\therefore AB = a = 10$

Clave C

48.



En el ΔAHB:

$b^2 = a \,.\, 1 = a$ ...(1)

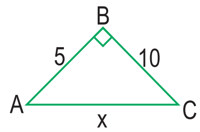
En el ΔBHC:

$a^2 = 8b$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$b = 2 \quad \wedge \quad a = 4$

Por Pitágoras:



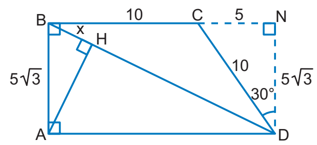
$x^2 = 5^2 + 10^2$

$x^2 = 25 + 100 = 125$

$x = 5\sqrt{5}$ m

Clave D

49.



En el ⊿ BND por el teorema de Pitágoras:

$(BD)^2 = (15)^2 + (5\sqrt{3})^2 \Rightarrow BD = 10\sqrt{3}$

Luego en el ⊿ BAD:

$(AB)^2 = (BH)(BD)$

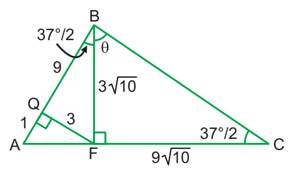
$(5\sqrt{3})^2 = (x)(10\sqrt{3})$

$5\sqrt{3} = 2x$

$\therefore x = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Clave B

50.



En el ⊿ AFB: $(QF)^2 = 1 \,.\, 9$

$\Rightarrow QF = 3$

En el ⊿ BQF por el teorema de Pitágoras:

$(BF)^2 = 9^2 + 3^2 = 90$

$\Rightarrow BF = 3\sqrt{10}$

Luego los triángulos rectángulos BQF y BFC resultan ser notables de 37°/2.

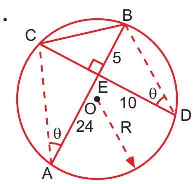
Piden:

$m\angle ABC = \dfrac{37°}{2} + \theta = \dfrac{37°}{2} + \left(90° - \dfrac{37°}{2}\right)$

$\therefore m\angle ABC = 90°$

Clave E

51.



Por el teorema de cuerdas:

$(CE)(10) = (24)(5)$

$CE = 12$

En el ⊿ CEB por el teorema de Pitágoras:

$(BC)^2 = (CE)^2 + (BE)^2 = 12^2 + 5^2$

$(BC)^2 = 169$

$\therefore BC = 13$ cm

Clave A

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 84) Unidad 3

1. Por el teorema de Stewart:

$x^2(30) = 25^2(20) + 35^2(10) - 20(10)30$

$30x^2 = 18\,750$

$x^2 = 625$

$\therefore x = 25$

Clave D

2. Semiperímetro: $\dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$

Por el teorema de Herón:

$h = \dfrac{2}{14}\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$\therefore h = \left(\dfrac{2}{14}\right)(3)(7)(4) = 12$

Clave B

3. Por teorema de Euclides:

$8^2 = 5^2 + 10^2 - 2(10)m$

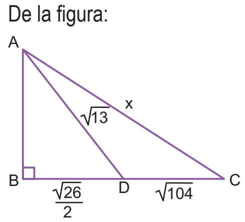
$20m = 25 + 100 - 64$

$20m = 61$

$\therefore m = \dfrac{61}{20} = 3{,}05$

Clave B

4. De la figura:



Por el 2.° teorema de Euclides:

$x^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{104})^2 + 2\sqrt{104}\left(\dfrac{\sqrt{26}}{2}\right)$

$x^2 = 13 + 104 + 52$

$x^2 = 169$

$\therefore x = 13$

Clave D

5. Por el teorema de la mediana:

$x^2 + 9^2 = 2(10^2) + \dfrac{8^2}{2}$

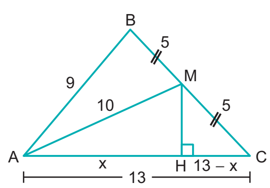
$x^2 + 81 = 200 + 32$

$x^2 = 151$

$\therefore x = \sqrt{151}$

Clave A

6. Del enunciado:



Hallamos la mediana AM:

$9^2 + 13^2 = 2AM^2 + \dfrac{10^2}{2}$

$81 + 169 = 2AM^2 + 50$

$\Rightarrow AM^2 = 100$

$AM = 10$

Por el teorema de Euclides en el $\triangle AMC$:

$5^2 = 10^2 + 13^2 - 2(13)x$

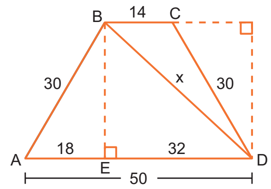
$25 = 100 + 169 - 26x$

$\Rightarrow 26x = 244$

$\therefore x = \dfrac{122}{13}$

Clave A

7. Según el enunciado:



Por el teorema de Euclides:

$x^2 = 30^2 + 50^2 - 2(18)50$

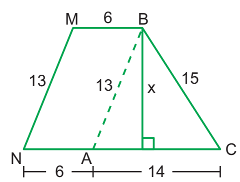
$x^2 = 900 + 2500 - 1800$

$x^2 = 1600$

$\therefore x = 40$

Clave D

8. De la figura:



En el $\triangle ABC$:

$\therefore x = \dfrac{2}{14}\sqrt{21(7)(8)(6)}$

$\Rightarrow x = 12$

Clave C

9. Teorema de Herón:

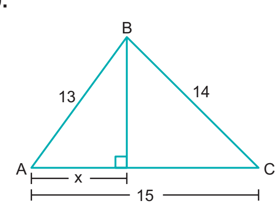
$x = \dfrac{2}{9}\sqrt{18(18-9)(18-17)(18-10)}$

$\therefore x = \dfrac{2}{9}\sqrt{18(9)(1)(8)}$

$\Rightarrow x = 8$

Clave A

10.



Teorema de Euclides:

$14^2 = 13^2 + 15^2 - 2(15)x$

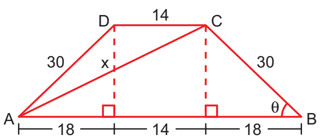
$196 = 169 + 225 - 30x$

$30x = 198$

$x = 6{,}6$

Clave C

11.



En el $\triangle ACB$:

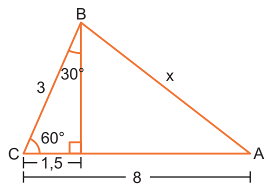
$x^2 = 30^2 + 50^2 - 2(50)(18)$

$x^2 = 1600$

$x = 40$

Clave A

12.



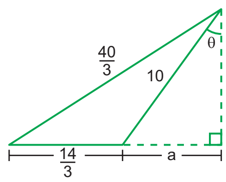
$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2(8)(1,5)$

$x^2 = 49$

$x = 7$

Clave E

13.



$$\left(\frac{40}{3}\right)^2 = \left(\frac{14}{3}\right)^2 + 10^2 + 2\left(\frac{14}{3}\right)(a)$$

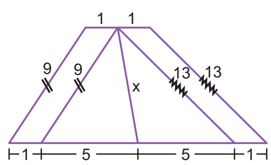
$$56 = \frac{28a}{3}$$

$a = 6$

$\Rightarrow \theta = 37°$

Clave A

14.



Teorema de la mediana:

$9^2 + 13^2 = 2x^2 + 2(5^2)$

$200 = 2x^2$

$100 = x^2$

$x = 10$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 86) Unidad 3

Comunicación matemática

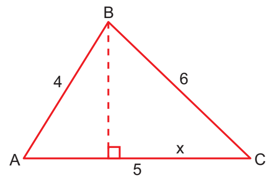
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



Por el teorema de Euclides:

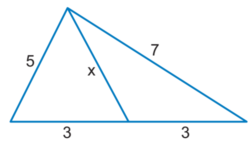
$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2(5)x$

$10x = 36 + 25 - 16$

$10x = 45 \Rightarrow x = 4,5$

Clave D

5.



$5^2 + 7^2 = 2x^2 + 2(3^2)$

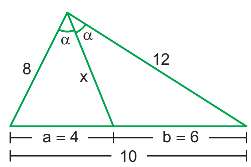
$56 = 2x^2$

$28 = x^2$

$x = 2\sqrt{7}$

Clave B

6.



$a + b = 10$ ...(1)

$$\frac{8}{a} = \frac{12}{b}$$

$$a = \frac{2b}{3}$$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{2b}{3} + b = 10$$

$$\frac{5b}{3} = 10 \Rightarrow b = 6$$

$\therefore\ b = 6 \ \wedge\ a = 4$

Del teorema de la bisectriz interior:

$x^2 = 8(12) - 4(6)$

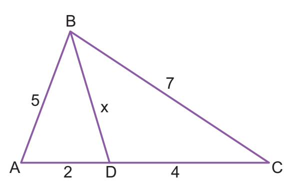
$x^2 = 96 - 24$

$x^2 = 72$

$x = 6\sqrt{2}$

Clave D

7.



En el $\triangle ABC$ por el teorema de Stewart:

$5^2(4) + 7^2(2) = x^2(6) + 6(2)4$

$198 = 6x^2 + 48$

$150 = 6x^2$

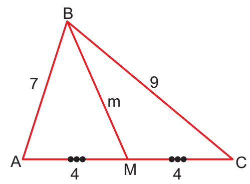
$x^2 = 25$

$\therefore x = 5$

Clave C

Resolución de problemas

8.



Por el teorema de la mediana:

$$\Rightarrow 7^2 + 9^2 = 2(m)^2 + \frac{8^2}{2}$$

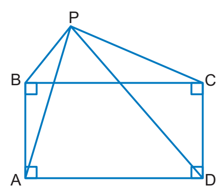
$130 = 2m^2 + 32$

$m^2 = 49$

$\therefore m = 7$

Clave D

9.



Por dato: $PA^2 + PC^2 = 8$

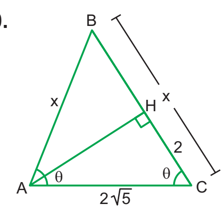
Por el teorema de Marlen (2.° caso):

$PB^2 + PD^2 = PA^2 + PC^2$

$\therefore PB^2 + PD^2 = 8$

Clave C

10.



En el $\triangle$ ACB, por el primer teorema de Euclides:

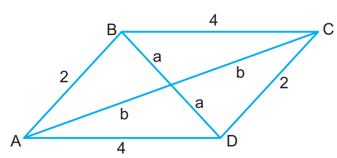
$x^2 = (2\sqrt{5})^2 + x^2 - 2(x)(2)$

$4x = 20$

$\therefore x = 5$

Clave C

11.



Teorema de la mediana en el $\triangle DAB$:

$2^2 + 4^2 = 2a^2 + 2b^2$

$20 = 2a^2 + 2b^2$

$40 = (2a)^2 + (2b)^2$

$\therefore (BD)^2 + (AC)^2 = 40$

Clave A

Nivel 2 (página 87) Unidad 3

Comunicación matemática

12.

13.

Razonamiento y demostración

14. Por el teorema de la mediana:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = 2(BM)^2 + \frac{(AC)^2}{2}$$

$$8^2 + 12^2 = 2x^2 + \frac{6^2}{2}$$

$$208 = 2x^2 + 18 \Rightarrow x^2 = 95$$

$$\therefore\ x = \sqrt{95}$$

Clave C

15. Por el teorema de Stewart:

$$(BF)^2(AC) = (AB)^2(FC) + (BC)^2(AF) - (AF)(FC)(AC)$$

$$x^2(6) = 5^2\,(2) + 7^2\,(4) - 4(2)6$$

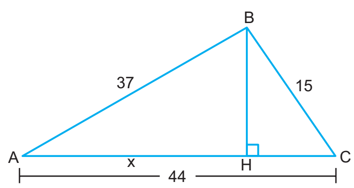
$$6x^2 = 50 + 196 - 48$$

$$6x^2 = 198 \Rightarrow x^2 = 33$$

$$\therefore\ x = \sqrt{33}$$

Clave E

16. De la figura:



Por el teorema de Euclides:

$$15^2 = 37^2 + 44^2 - 2(44)x$$

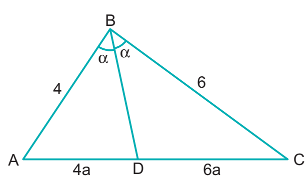
$$88x = 1369 + 1936 - 225$$

$$88x = 3080$$

$$\therefore\ x = 35$$

Clave E

17. De la figura:



$4a + 6a = 5 \Rightarrow a = 0{,}5$

$\therefore AD = 2 \ \wedge\ DC = 3$

Por el teorema de la bisectriz:

$$(BD)^2 = 4(6) - 2(3)$$

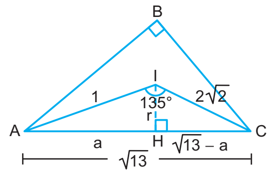
$$(BD)^2 = 24 - 6$$

$$BD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Clave D

Resolución de problemas

18.



$$AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2(2\sqrt{2})\cos 135°$$

$$AC^2 = 9 + 4$$

$$AC = \sqrt{13}$$

$$1 - a^2 = (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{13} - a)^2$$

$$1 - a^2 = 8 - 13 - a^2 + 2\sqrt{13}\,a$$

$$6 = 2\sqrt{13}\,a$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}} = a$$

$$r^2 + a^2 = 1$$

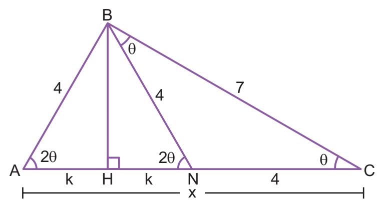
$$r^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1$$

$$r^2 = \frac{4}{13}$$

$$\therefore r = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Clave C

19.



Teorema de Euclides en el ΔBNC:

$$\Rightarrow 7^2 = 4^2 + 4^2 + 2(4)(k)$$

$$\frac{17}{4} = 2k$$

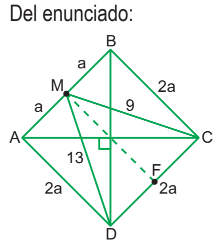
$$x = 4 + 2k$$

$$x = 4 + \frac{17}{4}$$

$$x = \frac{33}{4}$$

Clave A

20. Del enunciado:



En el ΔDMC: $\overline{MF}$ es mediana

$$13^2 + 9^2 = 2(2a)^2 + \frac{(2a)^2}{2}$$

$$169 + 81 = 2(4a^2) + \frac{4a^2}{2}$$

$$250 = 8a^2 + 2a^2$$

$$250 = 10a^2 \ \Rightarrow\ a^2 = 25 \ \therefore\ a = 5$$

El perímetro es:

$4(2a) = 8a = 8\,(5) = 40$

Clave E

Nivel 3 (página 88) Unidad 3

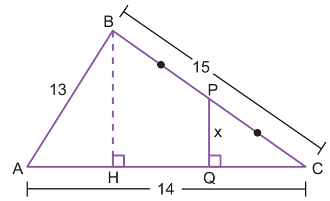
Comunicación matemática

21.

22.

Razonamiento y demostración

23. De la figura:



$$BH = \frac{2}{14}\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

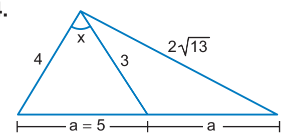
$$BH = 12$$

Pero, en ΔBHC: $x = \dfrac{BH}{2}$

$$\therefore x = \frac{12}{2} = 6$$

Clave D

24.



$$4^2 + (2\sqrt{13})^2 = 2(3)^2 + 2a^2$$

$$68 = 2(9) + 2a^2$$

$$50 = 2a^2$$

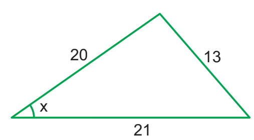
$$25 = a^2$$

$$a = 5$$

$$\therefore x = 90°$$

Clave E

25.



Ley de cosenos:

$$13^2 = 20^2 + 21^2 - 2(20)(21)\cos x$$

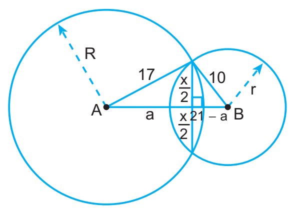
$$840\cos x = 672$$

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

$$\therefore\ x = 37°$$

Clave A

26.



$17^2 - a^2 = 10^2 - (21 - a)^2$

$289 - a^2 = 100 - 441 - a^2 + 42a$

$630 = 42a$

$15 = a$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 17^2 - 15^2$

$\frac{x^2}{4} = 64$

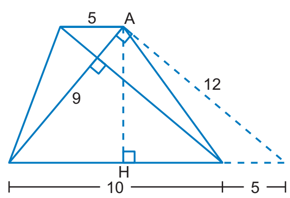
$x^2 = 256$

$x = 16$

Clave E

Resolución de problemas

27. Del enunciado:



$p = \dfrac{9 + 12 + 15}{2} = 18$

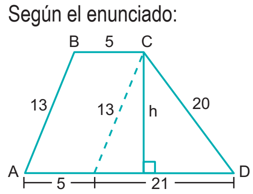
Por el teorema de Herón:

$\Rightarrow\ h = \dfrac{2}{15}\sqrt{18(9)(6)(3)}$

$\therefore\ h = 7{,}2$

Clave E

28. Según el enunciado:



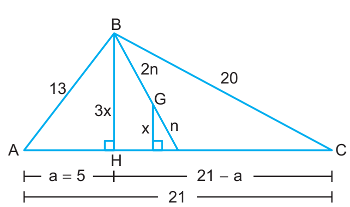
$h = \dfrac{2}{21}\sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)}$

$h = \dfrac{2}{21}\sqrt{27(14)(7)(6)}$

$\therefore h = 12$

Clave A

29.



$13^2 - a^2 = 20^2 - (21 - a)^2$

$169 - a^2 = 400 - 441 - a^2 + 42a$

$210 = 42a$

$5 = a$

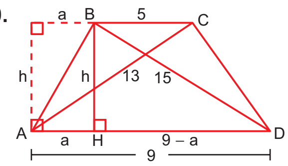
En el ⊿AHB:

$3x = 12$

$x = 4$

Clave C

30.



$h^2 = 13^2 - (a + 5)^2 = 15^2 - (9 - a)^{2+}$

$169 - a^2 - 25 - 10a = 225 - 81 - a^2 + 18a$

$0 = 28a$

$a = 0$

Entonces:

$AB \perp BC$:

$h^2 = 15^2 - 9^2$

$h^2 = 12^2$

$h = 12$

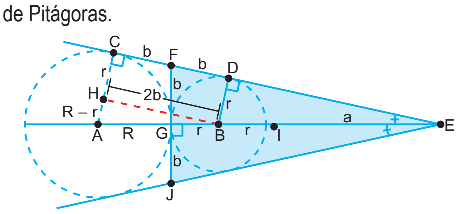
Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 89) Unidad 3

1. Nos piden hallar el área de ΔFJE en función de R y r; para lo cual decimos que IE = a y $\overline{FG}$ = b

Sabemos que $\overline{AE}$ es mediatriz de $\overline{JF}$ y por propiedad: CF = FD = FG = b

Luego trazamos $\overline{BH}$ // DC, para formar el ⊿BHA, en donde aplicamos el teorema de Pitágoras.



En el ⊿BHA:

$(R + r)^2 = (R - r)^2 + (2b)^2$

$(R + r)^2 - (R - r)^2 = 4b^2 \Rightarrow (R + r + R - r)(R + r - R + r) = 4b^2$

$\therefore\ 4Rr = 4b^2 \Rightarrow b = \sqrt{Rr}$ ... (I)

Luego vemos que ⊿FGE ~ ⊿AHB $\Rightarrow \dfrac{FG}{GE} = \dfrac{AH}{HB}$; reemplazando:

$\dfrac{b}{a + 2r} = \dfrac{R - r}{2b}$

$\Rightarrow\ 2b^2 = (R - r)(a + 2r);$

Reemplazando de (I): $2Rr = (R - r)(a + 2r)$

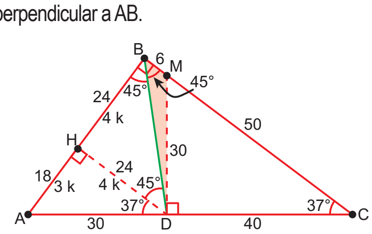
$\Rightarrow a + 2r = \dfrac{2Rr}{R - r};$

Finalmente: área de ⊿FJE $= \dfrac{1}{2}(2b)(a + 2r)$; reemplazando:

área del ⊿FJE $= \sqrt{Rr}\,\dfrac{2Rr}{R - r} \Rightarrow$ área del ⊿FJE $= \left(\dfrac{2Rr}{R - r}\right)\sqrt{Rr}$

Clave B

2. Trazamos $\overline{HD}$ perpendicular a $\overline{AB}$.



Luego por el teorema de Thales $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{30}{40} = k$, por lo tanto AH = 3k y HB = 4k.

Pero el ⊿BHD es notable de 45° $\Rightarrow$ BH = HD = 4k, luego en el ⊿AHD vemos que sus catetos están en la relación de 4 a 3, por lo tanto el ⊿AHD es notable de 37° y 53°.

$\therefore$ Si AD = 30 $\Rightarrow$ AH = 18 y HD = 24 pero HD = 24 = 4k $\Rightarrow$ k = 6

$\therefore$ BH = 24; luego como $\overline{HD}$ // $\overline{BC}$ $\Rightarrow$ m$\angle$HDA = m$\angle$BCA = 37°

⊿DMC y ⊿ABC son triángulos notables de 37° y 53°:

$\therefore$ si DC = 40 $\Rightarrow$ MC = 50 y MD = 30 y además si AC = 70 $\Rightarrow$ BC = 56

Pero BC = BM + MC; reemplazando: 56 = BM + 50 $\Rightarrow$ BM = 6,

Finalmente:

$2p_{\triangle BMD} = BD + BM + MD$, (pero $BD = 24\sqrt{2}$)

$\Rightarrow 2p_{\triangle BMD} = 24\sqrt{2} + 6 + 30$

$2p_{\triangle BMD} = (36 + 24\sqrt{2})$ cm

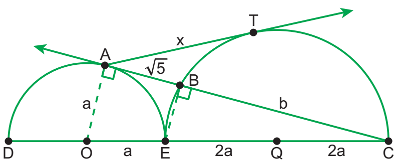
Clave E

3. Trazamos $\overline{OA}$ y $\overline{EB}$ perpendiculares a $\overline{AC}$, pues A es punto de tangencia y el arco $\overset{\frown}{EBC}$ es una semicircunferencia.

Luego del dato EC = 2(DE) $\Rightarrow$ DE = 2a $\Rightarrow$ EC = 4a

Vemos que: ⊿OAC ~ ⊿EBC $\Rightarrow \dfrac{5a}{4a} = \dfrac{\sqrt{5}+b}{b}$

$\Rightarrow 5b = 4\sqrt{5} + 4b \;\therefore\; b = 4\sqrt{5}$ ... (I)



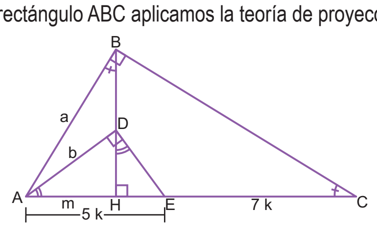
Luego aplicamos la teorema de la tangente en $\overline{AT}$ y $\overline{AC}$:

$x^2 = \sqrt{5}(\sqrt{5} + b)$, reemplazando de (I)

$x^2 = \sqrt{5}(\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) \Rightarrow x^2 = \sqrt{5}(5\sqrt{5}) \;\therefore\; x = 5$ m

Clave B

4. En el triángulo rectángulo ABC aplicamos la teoría de proyecciones:



Si AH = m (proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$)

$\Rightarrow a^2 = m(AC)$ del dato: $\dfrac{EC}{AE} = \dfrac{7}{5} = k \Rightarrow$ EC = 7k y AE = 5k

$a^2 = m(12k)$

De igual manera en el ⊿ADE: tenemos $b^2 = m(5k)$

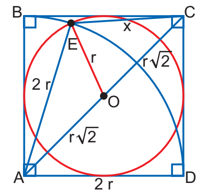
Finalmente

$$\left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{m(12k)}{m(5k)}$$

$$\therefore \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \frac{12}{5}$$

Clave C

5. Trazamos la diagonal AC; luego el ⊿ADC es notable de 45°:



$\therefore$ AC = $2r\sqrt{2}$ pero AC pasa por O (centro de la circunferencia inscrita) además O es punto medio de AC $\Rightarrow$ AO = OC = $r\sqrt{2}$

Luego trazamos AE el cual es igual a 2r (radio del cuadrante), trazamos $\overline{OE}$ el cual es igual a r por ser radio de la circunferencia inscrita finalmente en el $\triangle$AEC aplicamos el teorema de la mediana:

$(2r)^2 + x^2 = 2r^2 + \dfrac{1}{2}(2r\sqrt{2})^2 \Rightarrow 4r^2 + x^2 = 2r^2 + 4r^2$

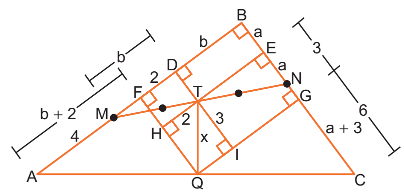
$\therefore x = r\sqrt{2}$

Clave B

6. Trazamos $\overline{TD}$ perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{TE}$ perpendicular a BC

Como T es punto medio de $\overline{MN}$, entonces los puntos D y E serán los puntos medios de $\overline{MB}$ y $\overline{BN}$ $\Rightarrow$ BE = EN = a y BD = DM = b;

De igual manera trazamos $\overline{QF}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{QG}$ / $\overline{AB}$.



Como Q es punto medio de $\overline{AC}$, entonces F y G serán los puntos medios de AB y BC respectivamente, pero AB = 4 + 2b y BC = 6 + 2a

Entonces AF = FB = 2 + b y BN = NC = 2 + a

1.° FB = 2 + b = FD + DB $\therefore$ 2 + b = FD + 6 $\Rightarrow$ FD = 2

2.° BG = a + 3 = BE + EG $\therefore$ a + 3 = a + EG $\Rightarrow$ EG = 3

Finalmente trazamos $\overline{TH}$ // $\overline{AB}$ y $\overline{TI}$ // $\overline{BC}$ donde H $\in$ $\overline{FQ}$ y I $\in$ $\overline{QG}$ para formar el ⊿TMQ donde TM = 2 y HQ = TI = 3 en dicho triángulo aplicamos el teorema de Pitágoras

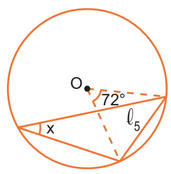
$\Rightarrow x^2 = 3^2 + 2^2 \;\therefore\; x = \sqrt{13}\,\mu$

Clave C

POLÍGONOS REGULARES

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 92) Unidad 4

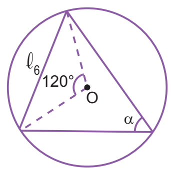
1. De la figura:



Entonces: $x = 36°$

Clave B

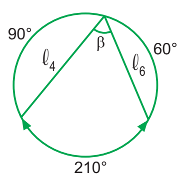
2. A partir de la figura:



Entonces: $\alpha = 60°$

Clave C

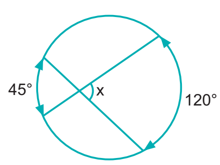
3. De la figura:



Luego: $\beta = 105°$

Clave A

4. De la figura mostrada:



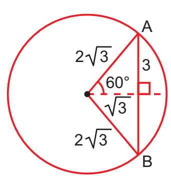
Entonces:

$$x = \frac{120° + 45°}{2} = 82{,}5°$$

$\therefore\ x = 82°30'$

Clave D

5. De la figura:



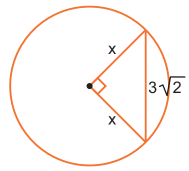
Luego:

$AB = 2(3)$

$\therefore AB = 6$

Clave C

6. A partir del gráfico:



Entonces:

$x^2 + x^2 = (3\sqrt{2})^2$

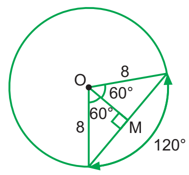
$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$\therefore\ x = 3$

Clave E

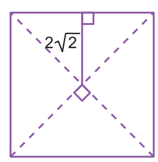
7. A partir del gráfico:



Luego: $OM = \frac{8}{2} \Rightarrow OM = 4$

Clave A

8. Según el enunciado:

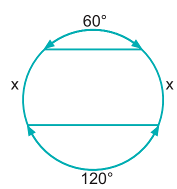


El lado del cuadrado es: $2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

La longitud del perímetro es: $4(4\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}$

Clave B

9. De la figura:



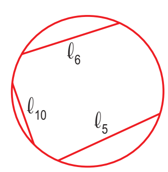
$\Rightarrow 2x + 60° + 120° = 360°$

$2x = 180°$

$x = 90°$

Clave C

10.



Dato: $(\ell_6)^2 + (\ell_{10})^2 = 100$

Por propiedad:

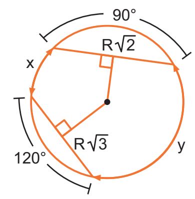
$(\ell_6)^2 + (\ell_{10})^2 = (\ell_5)^2$

$\Rightarrow 100 = (\ell_5)^2$

$\ell_5 = 10$

Clave D

11.



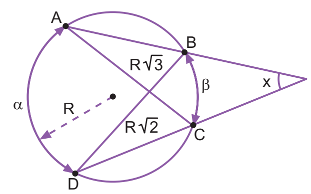
$x + 90° + y + 120° = 360°$

$x + y + 210° = 360°$

$\therefore x + y = 150°$

Clave E

12.



Como:

$AC = R\sqrt{3} \Rightarrow m\overset{\frown}{AC} = 120°$

$DB = R\sqrt{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{DB} = 90°$

Sabemos:

$m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BD} = 360°$

$\alpha + (120° - \beta) + 90° = 360°$

$\alpha - \beta + 210° = 360°$

$\alpha - \beta = 150°$

Por lo tanto:

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{150°}{2}$$

$\therefore x = 75°$

Clave B

13. Piden: α_{15}

$n = 15$ (pentadecágono regular)

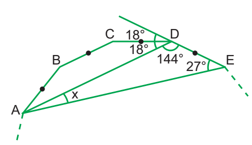
Sabemos:

$$\alpha_n = \frac{360°}{n}$$

$$\Rightarrow \alpha_{15} = \frac{360°}{15} = 24°$$

Clave D

14.



Sabemos que: $m\angle i = 162°$

Completando ángulos y luego en el $\triangle ADE$:

$x + 27° + 144° = 180°$

$\therefore\ x = 9°$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 94) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. Sabemos que: $\ell_6 = R$ (hexágono regular)

$\therefore \ell_6 = 2\sqrt{3}$ m

Clave E

5. El arco que corresponde a ℓ_4 es 90°:

$\Rightarrow x = \dfrac{90°}{2} = 45°$

Clave B

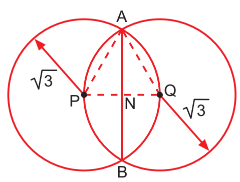
6. A ℓ_3 le corresponde el arco de 120°

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{120°}{2} = 60°$

Clave B

Resolución de problemas

7. Según el enunciado:

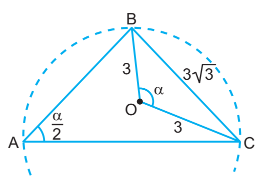


El ΔAPQ es equilátero:

$AN = \dfrac{3}{2} \Rightarrow AB = 3$

Clave E

8.



$(3\sqrt{3})^2 = 3^2 + 3^2 - 2(3)(3)\cos\alpha$

$27 = 18 - 18\cos\alpha$

$18\cos\alpha = -9$

$\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\alpha = 120°$

$\therefore m\angle A = 60°$

Clave C

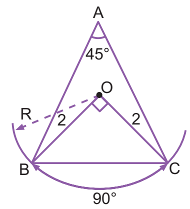
9. $R = 2\sqrt{3}$

$L\triangle = R\sqrt{3} = (2\sqrt{3})\sqrt{3} = 6$

$\therefore 2p\triangle = 6(3) = 18$

Clave D

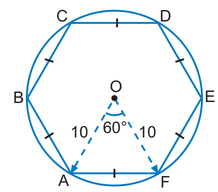
10.



$\therefore BC = 2\sqrt{2}$

Clave A

11.



Del gráfico:

$AF = \ell_6 = R$

$\Rightarrow \ell_6 = 10$

Piden: el perímetro del hexágono regular (2p)

$\Rightarrow 2p = 6(\ell_6) = 6(10)$

$\therefore 2p = 60$

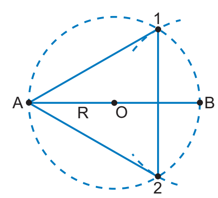
Clave C

Nivel 2 (página 94) Unidad 4

Comunicación matemática

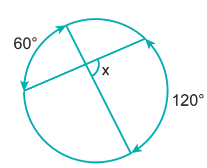
12.

13. Primero, con centro en B y radio n; determinamos los puntos 1 y 2 sobre la circunferencia, luego unimos los puntos 1; 2 y A para obtener un triángulo equilátero.



Razonamiento y demostración

14. De la figura:



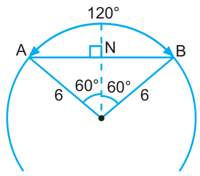
Entonces:

$x = \dfrac{120° + 60°}{2}$

$\therefore\ x = \dfrac{180°}{2} = 90°$

Clave C

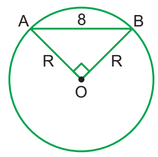
15. De la figura:



Notamos que:
$AN = 3\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2(3\sqrt{3})$
$\therefore\ AB = 6\sqrt{3}$

Clave C

16. De la figura:



$R^2 + R^2 = 8^2$
$2R^2 = 64$
$R^2 = 32$
$\therefore\ R = 4\sqrt{2}$

Clave C

Resolución de problemas

17. La medida del lado del hexágono regular inscrito es igual a la longitud del radio.

Por lo tanto:
Perímetro $= 6R = 6(4) = 24$ m

Clave B

18. Si el radio de una circunferencia es R, entonces:

- La medida del lado del cuadrado inscrito es: $R\sqrt{2}$
- La medida del lado del triángulo equilátero inscrito es: $R\sqrt{3}$

Luego:
$R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (dato) $\Rightarrow R = 5$
Por lo tanto:
La medida del lado del triángulo equilátero inscrito es: $5\sqrt{3}$

Clave A

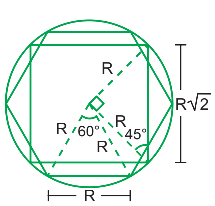
19. El arco de 120° corresponde al triángulo equilátero:

$\Rightarrow$ Radio $= \dfrac{\ell_3}{\sqrt{3}} = \dfrac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 15$

El arco de 60° corresponde al hexágono.
$\therefore\ \ell_6 = R = 15$ cm

Clave E

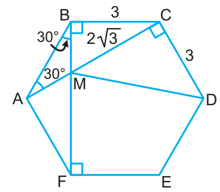
20.



$\therefore\ \dfrac{2p_{\square}}{2p_{\bigcirc}} = \dfrac{4\sqrt{2}R}{6R} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Clave C

21.



$AM = \sqrt{3} \wedge AC = 3\sqrt{3} \Rightarrow MC = 2\sqrt{3}$

$(MD)^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3)^2$

$(MD)^2 = 12 + 9$

$(MD)^2 = 21$

$\therefore\ MD = \sqrt{21}$

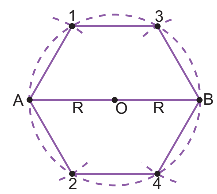
Clave E

Nivel 3 (página 95) Unidad 4

Comunicación matemática

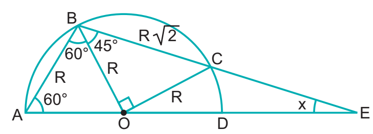
22.

23. Primero con centro en A y con radio R determinamos los puntos 1 y 2 sobre la circunferencia; luego de la misma manera; con centro en B y con radio R determinamos los puntos 3 y 4, finalmente unimos todos los puntos y obtenemos un hexágono regular.



Razonamiento y demostración

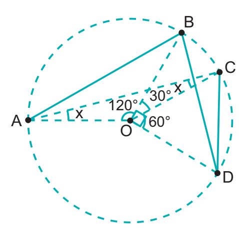
24. De la figura:



Entonces:
$60° + 60° + 45° + x = 180°$
$x = 180° - 60° - 60° - 45°$
$\therefore\ x = 15°$

Clave B

25.



De los dados:
$AB = R\sqrt{3} \Rightarrow AB = \ell_3$
$\therefore\ m\angle BOA = 120°$
$BD = R\sqrt{2} \Rightarrow BD = \ell_4$
$\therefore\ m\angle BOD = 90°$
$CD = R \Rightarrow CD = \ell_6$
$\therefore\ m\angle COD = 60°$

Luego:

m∠BOC = m∠BOD − m∠COD

∴ m∠BOC = 90° − 60° ⇒ m∠BOC = 30°

En el ΔAOC:

m∠AOC + m∠CAO + m∠ACO = 180°

m∠AOB + m<BOC + x + x = 180°

120° + 30° + 2x = 180° ⇒ x = 15°

Clave B

26. Se observa que el ΔBCQ es isósceles ($\overline{BC} \cong \overline{CQ}$), puesto que m∠QBC = m∠CQB = 72°

∴ BQ = ℓ_{10} (lado del decágono regular)

∴ $BQ = \frac{1}{2}(BC)(\sqrt{5} - 1)$; reemplazando del dato:

$BQ = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)\ u \Rightarrow BQ = 2\ u$

Clave D

Resolución de problemas

27. La apotema de un triángulo equilátero inscrito es $\frac{R}{2}$; entonces: R = 6 m

La medida del lado de dicho triángulo equilátero es $6\sqrt{3}$.

∴ El perímetro es:

$3(6\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$ m

Clave A

28. El lado mide:

$\frac{48}{6} = 8$ m

Entonces el radio es: R = 8 m

La apotema es: $\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ m

Clave B

29. Sabemos que

$N_D = \frac{n}{2}(n - 3) \wedge 22 < N_D < 34$

Probando valores:

Si $n = 7 \Rightarrow N_D = \frac{7}{2}(4)$

$N_D = 14$

Si $n = 8 \Rightarrow N_D = \frac{8}{2}(5)$

$N_D = 20$

Si $n = 9 \Rightarrow N_D = \frac{9}{2}(6)$

$N_D = 27$

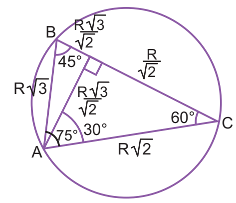
Si $n = 10 \Rightarrow N_D = \frac{10}{2}(7)$

$N_D = 35$

∴ n = 9

Clave B

30.



Del gráfico:

$BC = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{2}}$

Reemplazando: $R = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

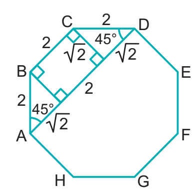
$BC = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{2}}$

$BC = \frac{\sqrt{2}(2)}{\sqrt{2}}$

∴ BC = 2

Clave C

31.



Por dato:

8(AB) = 16

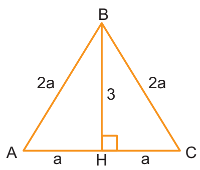
AB = 2

∴ $AD = 2\sqrt{2} + 2$

Clave C

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 97) Unidad 4

1. De la figura:



Aplicamos el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHB$:

$(2a)^2 = 3^2 + a^2$

$4a^2 = 9 + a^2$

$3a^2 = 9$

$a^2 = 3$

$a = \sqrt{3}$

Entonces: $AC = 2a = 2\sqrt{3}$

Área del $\triangle ABC$:

$A_{\triangle ABC} = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4 \times 3\sqrt{3}}{4}$

$\therefore A_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}\ m^2$

Clave A

2. Se cumple que:

$\dfrac{A_{\blacktriangle ABD}}{3} = \dfrac{A_{\blacktriangle BDC}}{5} = \dfrac{A_{\blacktriangle ABD} + A_{\blacktriangle BDC}}{3+5}$

$\dfrac{S_{\blacktriangle ABD}}{3} = \dfrac{S_{\blacktriangle BDC}}{5} = \dfrac{32}{8} = 4$

Luego: $S_{\blacktriangle BDC} = 20\ m^2$

Clave B

3. Aplicamos la fórmula de Herón:

$S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)}$

Calculando el semiperímetro:

$p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$

Reemplazando, tenemos:

$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$S = \sqrt{21(8)(7)(6)}$

$\therefore\ S = 84\ m^2$

Clave C

4. Se cumple que:

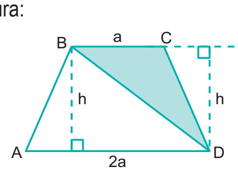
$(x)(3x) = (9)(12)$

$3x^2 = 108$

$x^2 = 36 \Rightarrow x = 6\ m^2$

Clave B

5. De la figura:



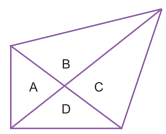
$\text{Área}_{\blacktriangle BCD} = \dfrac{ah}{2}$

$\text{Área}_{ABCD} = \dfrac{(3a)h}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\text{Área}_{\blacktriangle BCD}}{\text{Área}_{ABCD}} = \dfrac{1}{3}$

Clave C

6. Sabemos:



$(A)(C) = (B)(D)$

Entonces:

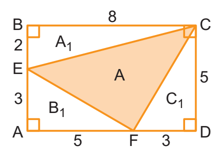
$8(S) = 4(6)$

$8S = 24$

$\therefore S = 3\ m^2$

Clave E

7. Del gráfico:



Área: $A = A_{\square ABCD} - A_1 - B_1 - C_1$

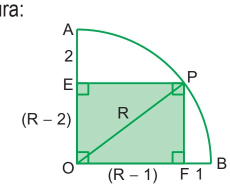
$A = 8(5) - \dfrac{2\times 8}{2} - \dfrac{3\times 5}{2} - \dfrac{3\times 5}{2}$

$A = 40 - 8 - 15$

$\therefore\ A = 17$

Clave C

8. De la figura:



Se cumple:

$(R-1)^2 + (R-2)^2 = R^2$

$2R^2 - 6R + 5 = R^2$

$R^2 - 6R + 5 = 0$

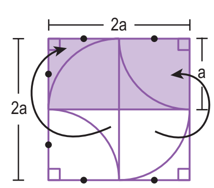
$\Rightarrow R = 5$

Luego, el área es:

$(EO)(OF) = (3)(4) = 12$

Clave D

9.



$A_{sombreada} = a(2a)$

$\therefore A_{sombreada} = 2a^2$

Clave B

10. Sea S el área del círculo:

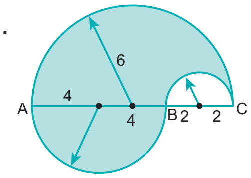
$S = \pi r^2$

$S = \pi \,.\, (3)^2$

$\therefore\ S = 9\pi\ m^2$

Clave D

11.



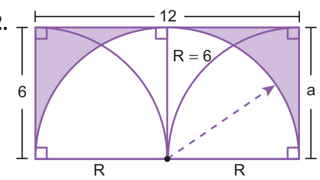
$A_{sombreada} = A_{AC} - A_{BC} + A_{AB}$

$A_{sombreada} = \dfrac{\pi(6^2)}{2} - \dfrac{\pi(2^2)}{2} + \dfrac{\pi(4^2)}{2}$

$\therefore A_{sombreada} = 18\pi - 2\pi + 8\pi = 24\pi$

Clave B

12.



Sea A el área de la región sombreada:

$\Rightarrow A = A_{\blacksquare} - A_{\frown}$

$A = 6(12) - \dfrac{\pi 6^2}{2}$

$A = 72 - 18\pi$

$\therefore A = 18(4 - \pi)$

Clave B

13. El área del sector circular es:

$S = \pi(R^2 - r^2)$

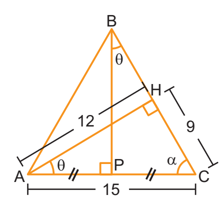
$S = \pi(6^2 - 2^2)$

$S = \pi(36 - 4)$

$\therefore\ S = 32\pi\ m^2$

Clave B

14.



Del gráfico:

$\triangle AHC \sim \triangle BPC$

$\Rightarrow \dfrac{12}{BP} = \dfrac{9}{7{,}5} \Rightarrow BP = 10$

Piden:

$A_{\blacktriangle ABC} = \dfrac{1}{2}(AC)(BP) = \dfrac{1}{2}(15)(10)$

$\therefore A_{\blacktriangle ABC} = 75\ m^2$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 99) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

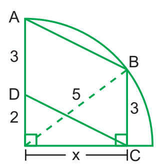
3. El área será:

$$A_{\blacktriangle} = \frac{6 \times 4}{2}\text{sen}120° = 12\text{sen}120°$$

$$A_{\blacktriangle} = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ m^2$$

Clave C

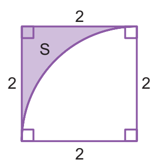
4. De la figura:



Se deduce que: $x = 4$
Luego: $A_{\blacksquare ABCD} = 3(4) = 12\ m^2$

Clave B

5.



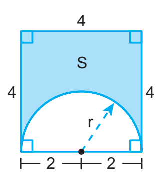
$S_{\blacksquare} = 2^2 = 4$

$S_{\blacktriangle} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$

Piden S:
$S = S_{\square} - S_{\blacktriangle}$
$S = 4 - \pi$

Clave B

6.



$S_{\blacksquare} = a^2 = 4^2 = 16$

Área del medio círculo: $S_{\blacktriangle}$

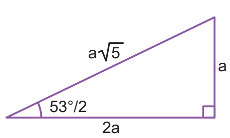
$S_{\blacktriangle} = \frac{\pi.r^2}{2} = \frac{2^2\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$

$\therefore S = 16 - 2\pi$

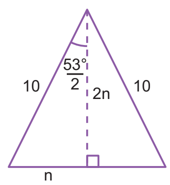
Clave A

Resolución de problemas

7. Recordar: triángulo de 53°/2:



En el problema:



$n^2 + (2n)^2 = 10^2$

$n^2 + 4n^2 = 100$

$5n^2 = 100$

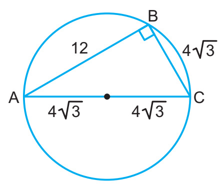
$n^2 = 20$

$A_{\blacktriangle} = \frac{(2n)(2n)}{2} = 2n^2 = 2(20) = 40$

$\therefore A_{\blacktriangle} = 40\ m^2$

Clave C

8. Del enunciado:



$$A_{\blacktriangle ABC} = \frac{12 \times 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}\ m^2$$

Clave D

9. El lado del cuadrado será:

$R\sqrt{2} \Rightarrow \text{lado} = 5\sqrt{2}$

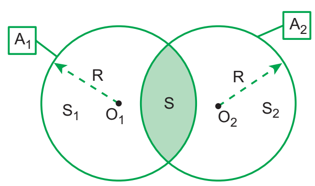
Área del cuadrado:

$L^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2$

Por lo tanto:
El área es: $50\ cm^2$

Clave E

10.



Por dato: $S = 100\ m^2$

Además: $A_1 \cup A_2$ es $400\ m^2$

$\Rightarrow S_1 + S + S_2 = 400$ ...(1)

Del gráfico:

$S_1 + S = \pi R^2 \Rightarrow S_1 = \pi R^2 - S$ ...(2)

$S_2 + S = \pi R^2 \Rightarrow S_2 = \pi R^2 - S$ ...(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$(\pi R^2 - S) + S + (\pi R^2 - S) = 400$

$2\pi R^2 = 400 + 100$

$2\pi R^2 = 500$

$\pi R^2 = 250$

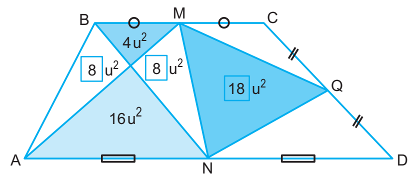
$\therefore R = 5\sqrt{\frac{10}{\pi}}\ m$

Clave C

Nivel 2 (página 100) Unidad 4

Comunicación matemática

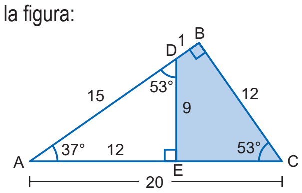
11.



12.

Razonamiento y demostración

13. De la figura:



Área pedida $= A_{\blacktriangle ABC} - A_{\blacktriangle AED}$

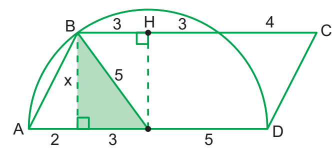
$= \frac{16 \times 12}{2} - \frac{12 \times 9}{2}$

$= 96 - 54 = 42$

Por lo tanto:
El área pedida es: $42\ m^2$

Clave A

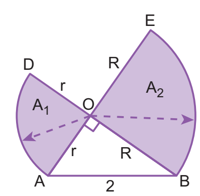
14. De la figura:



$x^2 = 2(3 + 5)$
$\Rightarrow x = 4$ m
El área es: $4(AD) = 4(10) = 40\ m^2$

Clave C

15.



Del gráfico:

$A_1 = \frac{\pi r^2}{4} \wedge A_2 = \frac{\pi R^2}{4}$

Piden:

$A_1 + A_2 = \frac{\pi r^2}{4} + \frac{\pi R^2}{4}$

$A_1 + A_2 = \frac{\pi}{4}(r^2 + R^2)$ ...(1)

En el ⊿ AOB por el teorema de Pitágoras:
$r^2 + R^2 = 2^2$

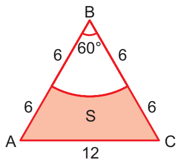
Reemplazando en (1):

$A_1 + A_2 = \frac{\pi}{4}(2^2) = \frac{\pi(4)}{4}$

$\therefore A_1 + A_2 = \pi$

Clave A

16.



El $\triangle ABC$ es equilátero: $m\angle B = 60°$

$S_{\blacktriangle} = \frac{\pi 60°}{360°}(6^2) = 6\pi$

$S_{\blacktriangle} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$

$S = 36\sqrt{3} - 6\pi$

$\therefore S = 6(6\sqrt{3} - \pi)$

Clave C

Resolución de problemas

17. Aplicamos Herón:

$p = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2}$

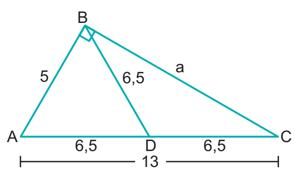
Área: $A_{\blacktriangle} = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-2\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-4\right)}$

$A_{\blacktriangle} = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4}\sqrt{15}$

$\therefore A_{\blacktriangle} = \frac{3\sqrt{15}}{4}\ m^2$

Clave C

18. Según el enunciado:



Por teorema de Pitágoras:

$5^2 + a^2 = 13^2 \Rightarrow a^2 = 169 - 25$

$a^2 = 144$

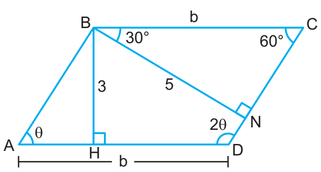
$a = 12$

El área es:

$A_{\blacktriangle} = \frac{5 \times 12}{2} = 30\ m^2$

Clave D

19.



Del gráfico: $\theta + 2\theta = 180°$

$3\theta = 180° \Rightarrow \theta = 60°$

Entonces el ◺BNC es notable de 30° y 60°.

$\Rightarrow b = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

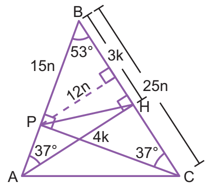
Piden:

$A_{\blacksquare ABCD} = (b)(BH) = \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)(3)$

$\therefore A_{\blacksquare ABCD} = 10\sqrt{3}\ m^2$

Clave E

20.



Sea: $BP = 15n \wedge BH = 3k$

Luego:

$A_{\blacktriangle PBH} = \frac{(12n)(3k)}{2} = 18nk$ ...(1)

$A_{\blacktriangle ABC} = \frac{(25n)(4k)}{2} = 50nk$ ...(2)

Dividiendo (1) y (2):

$\frac{A_{\blacktriangle PBH}}{A_{\blacktriangle ABC}} = \frac{9}{25}$

Por proporciones:

$\frac{A_{\blacktriangle PBH}}{A_{\blacktriangle ABC} - A_{\blacktriangle PBH}} = \frac{9}{25-9} \Rightarrow \frac{A_{\blacktriangle PBH}}{A_{\blacksquare APHC}} = \frac{9}{16}$

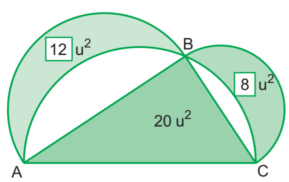
$\therefore \frac{A_{\blacktriangle PBH}}{A_{\blacksquare APHC}} = \frac{9}{16}$

Clave B

Nivel 3 (página 101) Unidad 4

Comunicación matemática

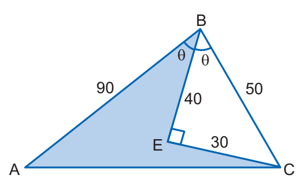
21.



22.

Razonamiento y demostración

23.



El ◺BEC es notable, entonces:

$\theta = 37°$

$S = S_{\blacktriangle ABC} - S_{\blacktriangle BEC}$

$S = \frac{90(50)}{2}\text{sen}74° - \frac{30(40)}{2}$

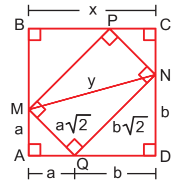
$S = 90(25)\frac{24}{25} - 600$

$S = 2160 - 600$

$S = 1560$

Clave A

24. De la figura:



Piden: $A_{\blacksquare MPNG} = 2ab$

Del gráfico:

$x = a + b$ ...(1)

$y^2 = (a\sqrt{2})^2 + (b\sqrt{2})^2 = 2(a^2 + b^2)$ ...(2)

De $(1)^2$ y (2):

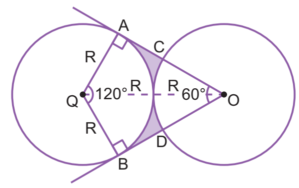
$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$x^2 = \frac{y^2}{2} + A_{\blacksquare MPNG}$

$\therefore A_{\blacksquare MPNG} = x^2 - \frac{y^2}{2}$

Clave A

25. De la figura:



$A = 2A_{\blacktriangle QAO} - A_{\blacktriangleleft AQB} - A_{\blacktriangleleft COD}$

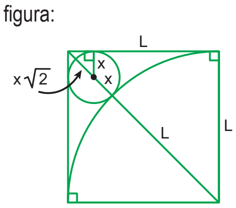
$A = 2\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{120°\pi R^2}{360°} - \frac{60°\pi R^2}{360°}$

$A = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{6} = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{2}$

$\therefore A = R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

Clave B

26. De la figura:



$\Rightarrow L\sqrt{2} = L + x + x\sqrt{2}$

$x = \frac{L(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}$

Pero: $L = (3 + 2\sqrt{2})\ m = (\sqrt{2}+1)^2\ m$

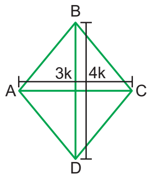
$\Rightarrow x = \frac{(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)} = 1$

Luego: Área $= \pi x^2 = \pi\ m^2$

Clave A

Resolución de problemas

27.



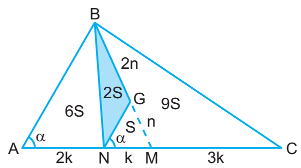
$4k - 3k = 6$

$k = 6$

$\therefore S_{ABCD} = \dfrac{(3k)(4k)}{2} = 6(6)^2 = 216$

Clave C

28.



Por dato: G es baricentro del $\triangle ABC$

$\Rightarrow BG = 2(GM)$

$\Rightarrow S_{\blacktriangle BNG} = 2S_{\blacktriangle NMG} = 2S$

Del gráfico: $\overline{AB} \parallel \overline{NG}$ y por el teorema de Tales:
$AN = 2(NM)$

$\dfrac{S_{\blacktriangle ABN}}{S_{\blacktriangle BNM}} = \dfrac{2k}{k} \Rightarrow S_{\blacktriangle ABN} = 6S$

Como $\overline{BM}$ es mediana, entonces:

$S_{\blacktriangle ABM} = S_{\blacktriangle MBC} = 9S$

Luego: $S_{\blacktriangle ABC} = 36$ (dato)

$\Rightarrow 18S = 36 \Rightarrow S = 2$

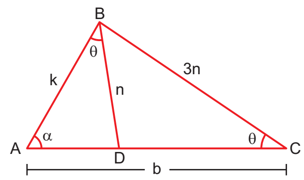
Piden:

$S_{\blacktriangle BNG} = 2S = 2(2)$

$\therefore S_{\blacktriangle BNG} = 4$

Clave D

29.



Del gráfico: $\triangle ABD \sim \triangle ABC$

$\dfrac{k}{n} = \dfrac{b}{3n} \Rightarrow b = 3k$

Empleando la fórmula trigonométrica

$S_{\blacktriangle ABD} = \dfrac{kn}{2}\operatorname{sen}\theta$ ...(I)

$S_{\blacktriangle ABC} = \dfrac{b(3n)}{2}\operatorname{sen}\theta$ ...(II)

Dividiendo (I) entre (II):

$\dfrac{S_{\blacktriangle ABD}}{S_{\blacktriangle ABC}} = \dfrac{k}{3b} = \dfrac{k}{3(3k)} = \dfrac{1}{9}$

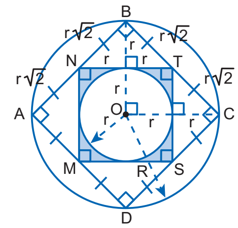
Por proporciones:

$\dfrac{S_{\blacktriangle ABD}}{S_{\blacktriangle ABC} - S_{\blacktriangle ABD}} = \dfrac{1}{9-1} \Rightarrow \dfrac{S_{\blacktriangle ABD}}{S_{\blacktriangle BDC}} = \dfrac{1}{8}$

$\therefore \dfrac{S_{\blacktriangle ABD}}{S_{\blacktriangle BDC}} = \dfrac{1}{8}$

Clave E

30.



Por dato el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Del gráfico: $2r = R$

$\Rightarrow r = \dfrac{R}{2}$

Piden:

$A_{somb.} = A_{\blacksquare MNTS} - A_{\bullet}$

$A_{somb.} = (2r)^2 - \pi r^2$

$A_{somb.} = r^2(4 - \pi)$

$\Rightarrow A_{somb.} = \left(\dfrac{R}{2}\right)^2(4 - \pi)$

$\therefore A_{somb.} = (1 - \dfrac{\pi}{4})R^2$

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 102) Unidad 4

1. $\frac{C}{V} = \frac{3}{1} \Rightarrow \begin{matrix} C = 3k \\ V = 1k \end{matrix}$

Usando la relación de Euler:

$C + V = A + 2$

$3k + k = 18 + 2$

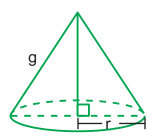
$4k = 20$

$k = 5$

El número de caras $3k = 3(5) = 15$ caras

Clave A

2.



En un cono equilátero se cumple:

$g = 2r$

Sabemos:

$A_T = \pi r(g + r)$

$27\pi = \pi r(2r + r)$

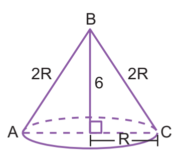
$27 = 3r^2$

$9 = r^2$

$\therefore\ r = 3$

Clave C

3.



En un cono equilátero se cumple: $g = 2R$

Aplicamos, el teorema de Pitágoras, para determinar el radio:

$(2R)^2 = 6^2 + R^2$

$4R^2 = 36 + R^2$

$\Rightarrow R = \sqrt{12}$

Nos piden el volumen del cono equilátero:

$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi(\sqrt{12})^2 \cdot 6}{3} = 24\pi$

Clave C

4. Sabemos:

$A_T = 2\pi R(g + R)$ ...(1)

Del dato:

$g = h = x;\ R = \frac{x}{2}$ y $A_T = 54\pi$

Reemplazando datos en (1):

$54\pi = 2\pi\frac{x}{2}\left(x + \frac{x}{2}\right)$

$54 = \frac{3x^2}{2}$

$36 = x^2 \qquad \therefore x = 6$

Clave C

5. El tercer lado de la base es:

$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

$A_L = (6 + 8 + 10)4$

$A_L = 24 \times 4 = 96$

$\therefore\ A_L = 96\ m^2$

Clave C

6. Se sabe que:

$A_T = a^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ m

Clave D

7. Por dato: $\pi R^2 = 9\pi \Rightarrow R = 3$

$V_{esfera} = \frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$

$\therefore V_{esfera} = 36\pi\ m^3$

Clave E

8. El radio de la esfera es 2 m.

Área $= 4\pi R^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$

$\therefore$ Área $= 16\pi\ m^2$

Clave B

9. Por dato: $\frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{a^3}{3} = 9 \Rightarrow a^3 = 27$

$\therefore\ a = 3$ m

Clave A

10. Un cubo tiene 12 aristas

$12a = 36 \Rightarrow a = 3$

El volumen del cubo: $a^3 = 3^3$

$\therefore V = 27\ cm^3$

Clave B

11. Teorema de Euler:

$C + V = A + 2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$27 + 15 = A + 2 \Rightarrow A = 40$

Clave B

12. $A_L = \pi Rg$

$g = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

$A_L = \pi(6)(10) = 60\pi$

$\therefore A_L = 60\pi\ m^2$

Clave C

13. Área de la base: $S_B = 3^2 = 9$

Altura $= 3\sqrt{2}$

$V = \frac{9 \times 3\sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2}\ m^3$

Clave A

14. Si el lado del cubo es a, entonces:

diagonal $= a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow \qquad a = 6$

Luego, el radio de la esfera es:

$R = \frac{a}{2} = 3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 104) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

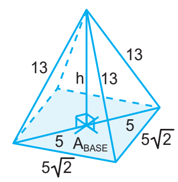
2. A) III; B) II; C) I; D) V; E) IV

3.

4. A) II; B) III; C) I

Razonamiento y demostración

5.



$A_{Base} = (5\sqrt{2})^2 = 50$

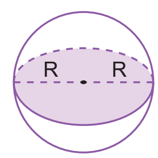
$h = 12$

Piden:

$V = \frac{50 \times 12}{3} \Rightarrow V = 200$

Clave C

6.



$\pi R^2 = 81\pi$

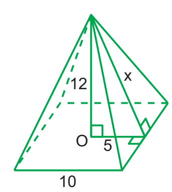
$R = 9$

$A_T = 4\pi R^2 = 4\pi(9^2) = 324\pi$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(9^3) = 972\pi$

Clave D

7.



$x = 12^2 + 5^2 \Rightarrow x = 13$

Clave C

Resolución de problemas

8. Datos:

$V = 24\sqrt{3} \quad \wedge \quad a = 4\sqrt{3}$

$S_{base} = 12\sqrt{3}$

$V = \frac{S_{base} \times h}{3}$

Entonces:

$24\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3} \times h}{3} \Rightarrow h = 6$

Clave E

9. Datos:
$A_L = 202{,}5$
$A_P = 9$

Sea p_{base} el semiperímetro de la base
Piden un lado: L

$A_L = p_{base} \times A_P$

$202{,}5 = p_{base} \times 9$

$\frac{45}{2} = p_{base}$

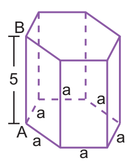
Como es un hexágono regular = 6 lados
Entonces: $p_{base} = \frac{6L}{2} = 3L$

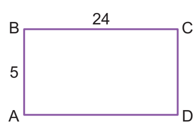
$\frac{45}{2} = 3L$

$\therefore L = 7{,}5$ m

Clave E

10.





Dato:
$6a = 24 \Rightarrow a = 4$
Piden: $V = A_{base} \times h$

$A_{base} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \times 6$

$= 24\sqrt{3}$

$V = 24\sqrt{3} \times 5 \Rightarrow V = 120\sqrt{3}$

Clave E

Nivel 2 (página 105) Unidad 4

Comunicación matemática

11. A) III; B) II; C) V; D) IV; E) I

12. I. (F) Porque, si son colineales pasan infinitos planos.
II. (V) Por definición.
III. (F) Porque, es "plano P o ◇P.
IV. (V) Por definición.

13. I. (V) Porque dos planos están formados por más de 4 puntos.
II. (V) Por definición.
III. (V) Similar al caso I.

Clave E

14. I. (F) Porque está incluida en varios planos.
II. (F) Porque está incluido en varios planos.
III. (F) Por definición.
IV. (F) Porque sí fueran paralelos no tendrían recta en común.

Clave E

Razonamiento y demostración

15. De la figura se nota que:
ΔEGA es equilátero.
$\Rightarrow m\angle AEG = 60°$

Clave C

16. Siendo B el área del círculo común:
$V_{cilindro} = Bh$

$V_{cono} = \frac{Bh}{3} \Rightarrow \frac{V_{cono}}{V_{cilindro}} = \frac{1}{3}$

Clave B

17. $V_{total} = V_{cubo} + V_{pirámide}$

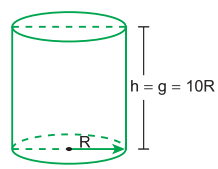
$V_{total} = 6^3 + \frac{6^2 \times 6}{3}$

$= 216 + 36 \times 2$
$= 216 + 72$
$= 288$

Clave C

Resolución de problemas

18. Sea el cilindro:

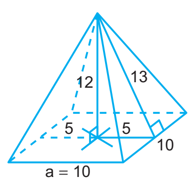


Datos: $h = g = 10R$; $A_T = 198\pi$ cm^2
Área total del cilindro es:
$A_T = 2\pi R(g + R)$

Reemplazando:
$198\pi = 2\pi R(10R + R)$
$198 = 22R^2$
$\Rightarrow R = 3$ cm

Clave C

19.



$A_T = A_{base} + A_L$

$360 = a^2 + 4\left(\frac{a \times 13}{2}\right)$

$360 = a^2 + 26a$

$a^2 + 26a - 360 = 0$

$\Rightarrow a = 10$

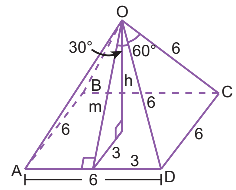
Piden V:

$V = \frac{100 \times 12}{3}$

$V = 400$

Clave B

20.



$m = 3\sqrt{3}$

$h^2 + 3^2 = m^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{2}$

$V = \frac{A_{base} \times h}{3} = \frac{6^2 \times 3\sqrt{2}}{3}$

$V = 36\sqrt{2}$

Clave C

Nivel 3 (página 106) Unidad 4

Comunicación matemática

21. I. (F) Deben ser no coplanarios.
II. (F) Deben ser no coplanarios.
III. (V) Por definición.
IV. (V) Por definición.

Clave B

22. I. (F) Porque un poliedro tiene lados poligonales.
II. (F) Porque tiene 4 caras como mínimo.
III. (V) Por definición.
IV. (F) Por definición.

Clave C

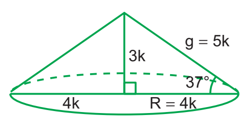
23. I. (V) Por definición.
II. (V) Por definición.
III. (V) Cumple la definición de prisma.
IV. (V) Por definición.

Clave E

24. I. (V) Por definición.
II. (V) Por definición.
III. (F) Por definición la base es poligonal.
IV. (F) Por definición la base es poligonal.

Razonamiento y demostración

25. Sea S el área de la sección axial.



Sabemos:
$A_L = \pi \cdot g \cdot R$

Del dato:

$A_L = 40\pi$

$\pi \cdot 5k \cdot 4k = 40\pi$

$20k^2 = 40$

$\Rightarrow k = \sqrt{2}$

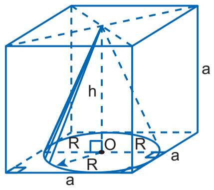
Por lo tanto:

$S = \frac{8k \cdot 3k}{2} = 12k^2 = 12(\sqrt{2})^2$

$\therefore S = 24$

Clave A

26.



Del gráfico: $a = 2R \wedge h = a \Rightarrow h = 2R$
Por dato: el área de la proyección del cono sobre la base del cubo mide $9\pi\ m^2$.
$\pi R^2 = 9\pi$
$R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$

Piden: el volumen del cubo (V)

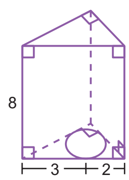
$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi R^2)(2R)$$

$$V = \frac{2\pi}{3}R^3 = \frac{2\pi}{3}(3)^3 = 18\pi$$

$\therefore V = 18\pi\ m^3$

Clave A

27.

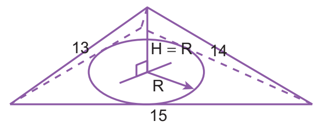


$\therefore V = 3\ .\ 2\ .\ 8 = 48$

Clave D

Resolución de problemas

28.



Calculamos el área de la base por la fórmula de Herón:

$$A_{base} = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

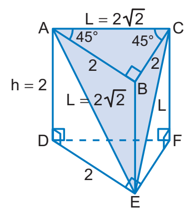
Donde: $a = 13$; $b = 14$ y $c = 15$
$p = 21 \Rightarrow A_{base} = 84$

También:
$A_{base} = p \times R = 21.R$
$84 = 21.R \Rightarrow R = 4$

$$V = \frac{A_{base} \times h}{3} = \frac{84 \times 4}{3} = 112$$

Clave B

29.



Dato: $A_{\triangle AEC} = 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

$L^2 = 8$
$L = 2\sqrt{2}$

Piden V:
$V = A_{base} \times h$

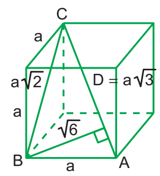
$$V = \frac{2 \times 2}{2} \times AD$$

$V = 2 \times 2$

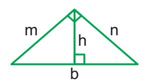
$V = 4$

Clave E

30. Sea la longitud de la arista de un cubo.



Sabemos:



$m\ .\ n = h\ .\ b$

Por lo tanto, en el triángulo ABC se tiene:

$a\ .\ a\sqrt{2} = \sqrt{6}\ .\ a\sqrt{3}$

$$a = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}}$$

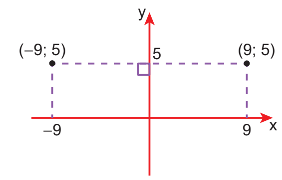
$\therefore a = 3$

Clave C

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO

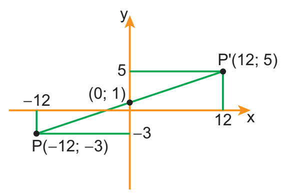
APLICAMOS LO APRENDIDO (página 107) Unidad 4

1.



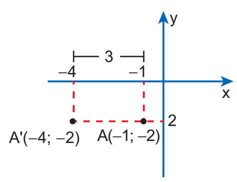
Clave C

2.



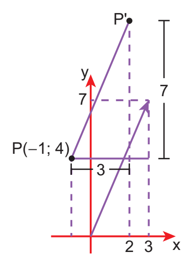
Clave B

3.



Clave B

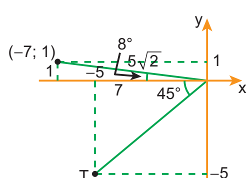
4.



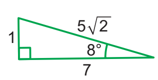
P' = (–1 + 3; 4 + 7) = (2; 11) ⇒ 2 +11 = 13

Clave C

5.

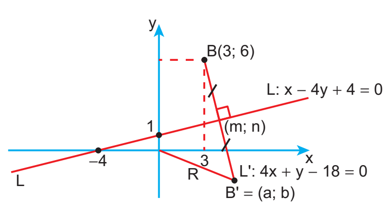


–7 + 1 = –6



Clave B

6.



Para determinar (m, n) resolvemos:

$x - 4y + 4 = 4x + y - 18$

$22 = 3x + 5y$ ...(1)

De L': $4x + y = 18$ ...(2)

5(2) – (1):

$17x = 68$

$x = 4$

$y = 2$ ⇒ (m, n) = (4, 2)

Puntos medios:

$\Rightarrow \dfrac{B' + B}{2} = (m, n)$

$B' = 2(m, n) - B$

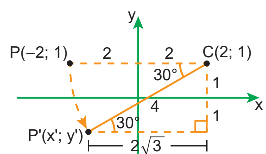
$B' = 2(4, 2) - (3, 6)$

$B' = (5, -2)$

$\Rightarrow R = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

Clave B

7.



$P' = \text{Rot}\,(-2; 1)_{(C;\,30°)}$

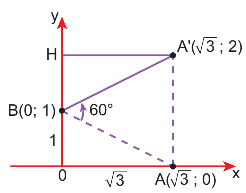
$P' = (-(2\sqrt{3} - 2); -1)$

$P' = (2 - 2\sqrt{3}; -1)$

Piden $(2 - 2\sqrt{3})(-1) = 2\sqrt{3} - 2$

Clave C

8.



Hallamos el punto A':

$A' = \text{Rot}\,A_{(B;\,60°)}$

$A' = \text{Rot}\,(\sqrt{3}; 0)_{(B;\,60°)}$

$A' = (\sqrt{3}; 2)$

Sabemos: BA = BA' y m∠ABA' = 60°

⇒ ∆ABA' es equilátero

Luego: $AB = \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2}$

$AB = \sqrt{3 + 1}$

$AB = 2 \Rightarrow AA' = 2$

También: $A'H = AO = \sqrt{3}$

Hallamos $G(x_G; y_G)$

$x_G = \dfrac{0 + \sqrt{3} + \sqrt{3}}{3}$; $y_G = \dfrac{1 + 2 + 0}{3}$

$x_G = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$; $y_G = 1$

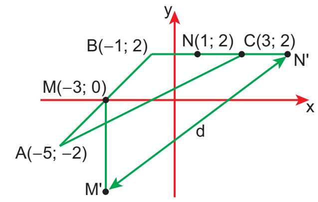
$\therefore G\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}; 1\right)$

Clave D

9. Graficamos el plano cartesiano:

Dato: NN' = 4

MM' = 4



Tenemos M(–3; 0) y N(1; 2).

Hallamos el punto M en $\overline{AB}$, del gráfico: AM = MB

$\Rightarrow \quad x_M = \dfrac{1}{2}(-5 + (-1))$

$x_M = -3$

$\Rightarrow \quad y_M = \dfrac{1}{2}(-2 + 2)$

$y_M = 0/2$

∴ M = (– 3; 0)

Igualmente para N en $\overline{BC}$:

$\Rightarrow \quad x_N = \dfrac{1}{2}(-1 + 3)$

$x_N = 1$

$\Rightarrow \quad y_N = \dfrac{1}{2}(2 + 2)$

$y_N = 2$

∴ N = (1; 2)

Hallamos M':

$M' = \text{Tras}\,M_{(-\vec{y};\,4)}$

$M' = \text{Tras}\,(-3; 0)_{(-\vec{y};\,4)}$

$M' = (-3; 0 - 4)$

$M' = (-3; -4)$

Hallamos N':

$N' = \text{Tras}\,N_{(\vec{x};\,4)}$

$N' = \text{Tras}\,(1; 2)_{(\vec{x};\,4)}$

$N' = (1 + 4; 2)$

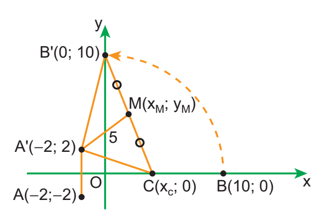
$N' = (5; 2)$

$M'N' = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (2 - (-4))^2}$

$M'N' = 10$

Clave A

10. Se grafican los ejes:



$A' = \text{Sim}\,A_{(\text{eje } x)}$

$A' = \text{Sim}\,(-2; -2)_{(\text{eje } x)}$

$A' = (-2; 2)$

$C \in x$

$\therefore C = (x_c; 0)$

$B' = \text{Rot}\,B_{(0;\,90°)}$

$B' = \text{Rot}\,(10; 0)_{(0;\,90°)}$

OB = OB' = 10

Luego M es punto medio de $\overline{B'C}$:

$$\Rightarrow x_M = \frac{0 + x_c}{2};\ y_M = \frac{0 + 10}{2}$$

$$x_M = \frac{x_c}{2};\ y_M = 5$$

$$M = \left(\frac{x_c}{2}; 5\right)$$

Además A'M = 5

$$\Rightarrow \quad 5 = \sqrt{\left(\frac{x_c}{2} - (-2)\right)^2 + (5-2)^2}$$

$$5^2 = \left(\frac{x_c}{2} + 2\right)^2 + 3^2$$

$$\underbrace{(5+3)}_{8}\underbrace{(5-3)}_{2} = \left(\frac{x_c}{2} + 2\right)^2$$

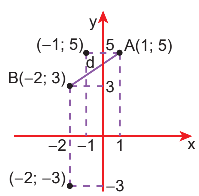
$$\Rightarrow \sqrt{16} = \frac{x_c}{2} + 2$$

$$4 - 2 = \frac{x_c}{2}$$

$$\therefore x_c = 4 \Rightarrow C = (4; 0)$$

Clave E

11.

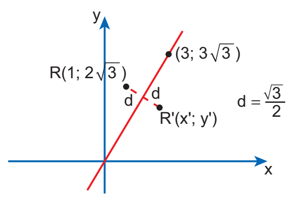


$$d = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-5)^2}$$

$$d = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Clave B

12.



$$\frac{|x' - 1|}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x' - 1 = \frac{3}{2}$$

$$x' = \frac{5}{2}$$

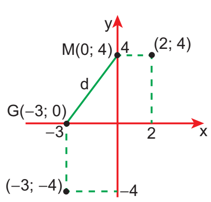
$$\frac{|y' - 2\sqrt{3}|}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 2\sqrt{3} - y' = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$R' = \left(\frac{5}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Clave C

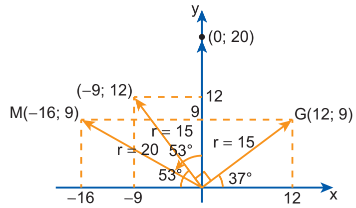
13.



$$d = \sqrt{(0-(-3))^2 + (4-0)^2} = 5$$

Clave E

14.



$$d = \sqrt{(-16-12)^2 + (9-9)^2}$$

$$d = 28$$

Clave B

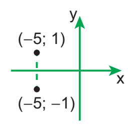
PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 109) Unidad 4

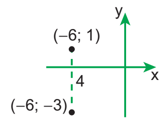
Comunicación matemática

1.

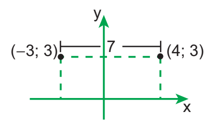
I. (V)



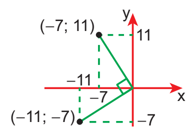
II. (V)



III. (V)



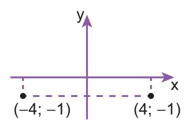
IV. (F)



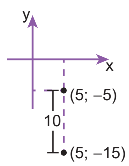
Clave C

2.

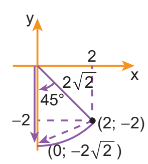
I. (F)



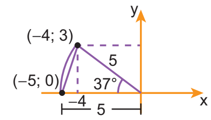
II.
(F)



III.
(V)



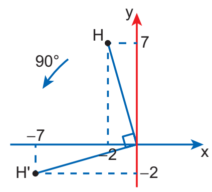
IV.
(F)



Clave C

Razonamiento y demostración

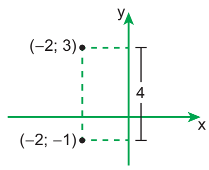
3.



H' = (–7; –2)

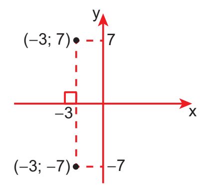
Clave A

4.



Clave E

5.

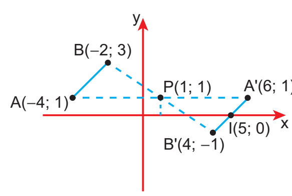


(–3; –7)

Clave C

Resolución de problemas

6.

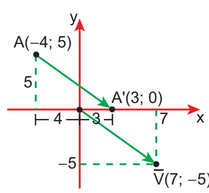


I = (5; 0)

$\Rightarrow x_1 = 5$

Clave E

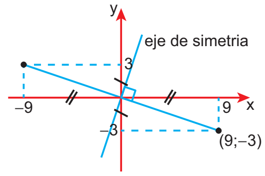
7.



$\Rightarrow A = (-4; 5) \Rightarrow -4 + 5 = 1$

Clave D

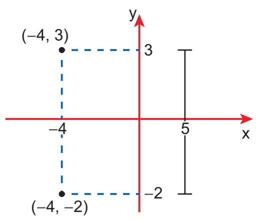
8.



$x - y = 12$

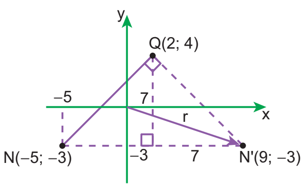
Clave B

9.



Clave A

10.



$r^2 = 9^2 + 3^2 \Rightarrow r^2 = 3^2(3^2 + 1)$

$r = 3\sqrt{10}$

Clave A

Nivel 2 (página 109) Unidad 4

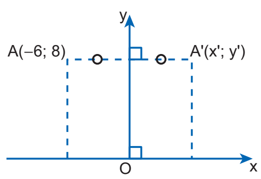
Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13.



Piden: $A' = \text{Sim}\ (-6; 8)_{(\text{eje } y)}$

$(x'; y') = \text{Sim}\ (-6; 8)_{(\text{eje } y)}$

$\Rightarrow \quad x' = -(x); \quad y' = y$

$x' = -(-6) \quad y' = 8$

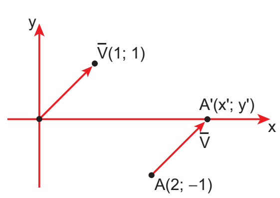
$A'(6; 8)$

Radio vector $A'(6; 8) \Rightarrow V_A' = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$\Rightarrow V_A' = 10$

Clave B

14.



Piden $A' = \text{Tras}\ A_{(\vec{V})}$

$A' = \text{Tras}\ (2; 1)_{(\vec{V})};\ V(1; 1)$

$x = 2 \qquad x_0 = 1$

$y = -1 \qquad y_0 = 1$

Coordenadas de $A'(x'; y')$:

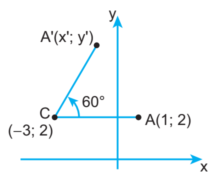
$x' = (2) + (1) \qquad y' = (-1) + (1)$

$x' = 3 \qquad y' = 0$

$\Rightarrow A'(3; 0)$

Clave C

15.



Piden:

$A' = \text{Rot}\ A_{(C;\ 60°)}$

$A' = \text{Rot}\ (1; 2)_{(C;\ 60°)};\ C(-3; 2)$

$x = 1 \qquad x_0 = -3$

$y = 2 \qquad y_0 = 2$

Coordenadas de $A'(x'; y')$:

$x' = (-3) + (1 - (-3))\cos 60° - (2 - 2)\text{sen}60°$

$x' = -3 + 4\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x' = -1$

$y' = (2) + (1 - (-3))\text{sen}60° + (2 - 2)\cos 60°$

$y' = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(4) \Rightarrow y' = 2 + 2\sqrt{3}$

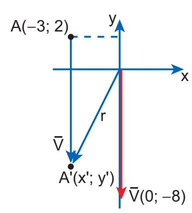
$\therefore A'(-1; 2 + 2\sqrt{3})$

Piden $(x')(y') \Rightarrow x'y' = -2 - 2\sqrt{3}$

Clave C

Resolución de problemas

16.



Piden: $A' = \text{Tras}\ A_{(\vec{V})}$

$A' = \text{Tras}\ (-3; 2)_{(\vec{V})};\ V(0; -8)$

$x = -3 \qquad x_0 = 0$

$y = 2 \qquad y_0 = -8$

Coordenadas de $A'(x'; y')$:

$x' = (-3) + 0 \qquad y_1' = (2) + (-8)$

$x' = -3 \qquad y_0' = -6$

$\Rightarrow A'(-3; -6)$

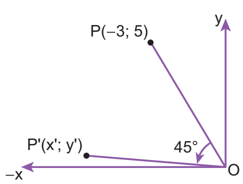
Radio vector $A'(-3; -6)$

$v_A' = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2}$

$\therefore v_A' = 3\sqrt{5}$

Clave D

17.



Piden: $P' = \text{Rot}\ P_{(O;\ 45°)}$

$P' = \text{Rot}\ (-3; 5)_{(O;\ 45°)};\ O(0; 0)$

$x_1 = -3 \qquad x_0 = 0$

$y = 5 \qquad y_0 = 0$

Coordenadas de $P'(x'; y')$:

$x' = (-3)\cos 45° - 5\text{sen}45°$

$x' = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x' = -4\sqrt{2}$

$y' = (-3)\text{sen}45° + 5\cos 45°$

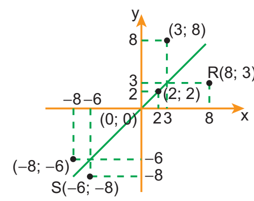
$y' = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y' = \sqrt{2}$

$\therefore P'(-4\sqrt{2}; \sqrt{2})$

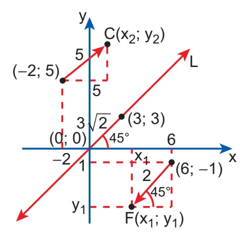
Clave D

18.



$R = (8; 3) \wedge S = (-6, -8)$

19.



$\frac{|6 - x_1|}{3} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \Rightarrow x_1 = 6 - \sqrt{2}$

$\frac{|-1 - y_1|}{3} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \Rightarrow y_1 = -\sqrt{2} - 1$

$F = (6 - \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2})$

$\frac{|x_2 - (-2)|}{3} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$

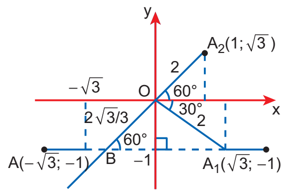
$x_2 = -2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$\frac{|y_2 - 5|}{3} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$

$y_2 - 5 = \frac{5}{2}\sqrt{2} \Rightarrow y_2 = 5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$C = \left(-2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}; 5 + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$

20.



$$\Rightarrow \frac{BO}{A_2O} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

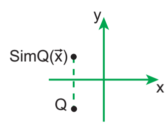
Clave E

Nivel 3 (página 110) Unidad 4

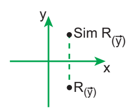
Comunicación matemática

21.

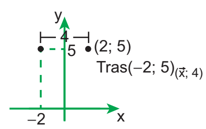
I. (F)



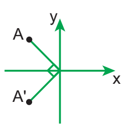
II. (F)



III. (V)



IV. (F)

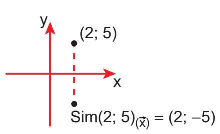


Rot A(O,90°) $\in$ IIIC

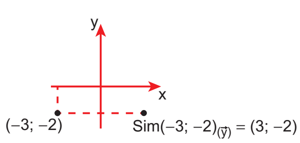
Clave D

22.

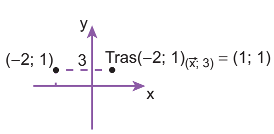
I. (F)



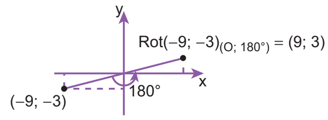
II. (V)



III. (F)



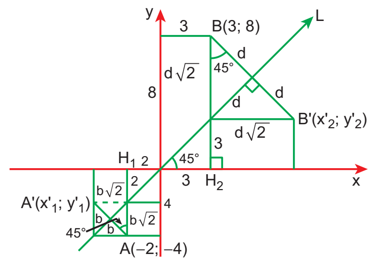
IV. (V)



Clave A

Razonamiento y demostración

23. Graficamos el plano cartesiano:



Primero:simetría de A(–2; –4) con respecto a $\overleftrightarrow{L}$:

$(x_1'; y_1') = \text{Sim}\,(-2; -4)_{\overleftrightarrow{L}}$

Del gráfico:

$x_1' = -(2 + b\sqrt{2})$

$y_1' = -(4 - b\sqrt{2})$

$A'(-(2+b\sqrt{2}); -(4-b\sqrt{2}))$ ...(I)

En AH_1:

$2 + b\sqrt{2} = 4 \Rightarrow b\sqrt{2} = 2$

$b = \sqrt{2}$

Reemplazando en (I):

$A'(-4; -2)$

Segundo: simetría de B(3; 8) con respecto a $\overleftrightarrow{L}$

$(x_2'; y_2') = \text{Sim}(3; 8)_{\overleftrightarrow{L}}$

Del gráfico:

$x_2' = 3 + d\sqrt{2}$

$y_2' = 8 - d\sqrt{2}$

$B'(3 + d\sqrt{2}; 8 - d\sqrt{2})$ ...(II)

En el segmento B H_2:

$3 + d\sqrt{2} = 8 \Rightarrow d\sqrt{2} = 5$

$d = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Reemplazando en (II):

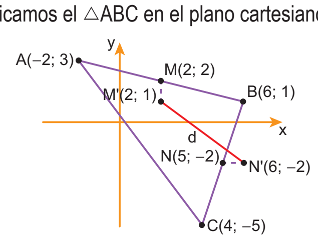
B' = (8 ; 3)

Luego la distancia entre A' y B':

$AB = \sqrt{(8-(-4))^2 + (3-(-2))^2} \Rightarrow d = 13$

Clave D

24. Graficamos el $\triangle$ABC en el plano cartesiano:



Hallamos el punto M en $\overline{AB}$:

$M(x_M; y_M) \Rightarrow x_M = \frac{1}{2}(-2+6)$

$x_M = 2$

$\Rightarrow y_M = \frac{1}{2}(3+1)$

$y_M = 2$

$\therefore$ M(2; 2)

Hallamos el punto N en $\overline{BC}$:

$N(x_N; y_N) \Rightarrow x_N = \frac{1}{2}(4+6)$

$x_N = 5$

$\Rightarrow y_N = \frac{1}{2}(-5+1)$

$y_N = -2$

$\therefore$ N(5; –2)

Luego trasladamos M en dirección de (–y):

$M' = \text{Tras}\ M_{(\vec{y};\,1)}$

$M' = \text{Tras}\ (2; 2)_{(\vec{y};\,1)}$

$M' = (2 + 0; 2 - 1)$

$M' = (2; 1)$

Luego trasladamos N en dirección de (x) :

$N' = \text{Tras}\ N_{(\vec{x};\,0)}$

$N' = \text{Tras}\ (5; -2)_{(\vec{x};\,0)}$

$N' = (5 + 1; -2 + 0)$

$N' = (6; -2)$

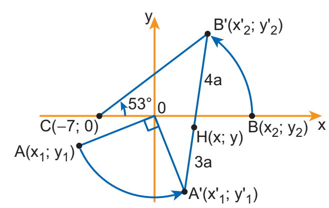
Finalmente hallamos la distancia entre M' y N':

$M'N' = \sqrt{(6-2)^2 + (-2-1)^2}$

$M'N' = 5$

Clave D

25. Graficamos el plano cartesiano:



Dato: 4A'H = 3HB'

$\frac{A'H}{HB'} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ A'H = 3a

HB' = 4a

Designamos:

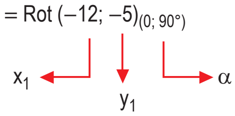
$A' = (x_1'; y_1')$

$B' = (x_2'; y_2')$

Primero: rotación de $A(x_1; y_1)$

Centro de giro: $O(x_0; y_0) = (0; 0)$

$(x_1'; y_1') = \text{Rot}\ (-12; -5)_{(0;\,90°)}$



Como $\alpha = 90°$ y O = (0; 0)

Por propiedad:

$x'_1 = -y_1 \Rightarrow x'_1 = -(-5)$

$x'_1 = 5$

$y'_1 = x_1 \Rightarrow y' = (-12)$

$y' = -12$

A'(5; –12)

Segundo: rotación de B(x_2 ; y_2)

Centro de giro: C(x_0; y_0) = (–7; 0)

$(x'_2; y'_2) = \text{Rot}\,(13; 0)_{(C;\,53°)}$

x_2 y_2 α

$x'_2 = x_0 + (1/2 - y_0)\cos\alpha - (y_2 - y_0)\text{sen}\alpha$

$x'_2 = (-7) + (13 - (-7)\cos 53° - (0 - 0)\text{sen}\alpha$

$x'_2 = -7 + 20 \,.\, \cos 53°$

$x'_2 = -7 + (20)\left(\dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow x'_2 = 5$

$y'_2 = y_0 + (x_2 - x_0)\text{sen}\alpha - (y_2 - y_0)\cos\alpha$

$y'_2 = 0 + (13 - (-7))\text{sen}53° - (0 - 0)\cos 53°$

$y'_2 = (20)\text{sen}53°$

$y'_2 = 20\left(\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow y'_2 = 16$

B'(5; 16)

Como tenemos A' y B' podemos calcular H(x; y):

$$x = \frac{(4a)(x'_1) + (3a)(x'_2)}{3a + 4a}$$

$$x = \frac{(4a)(5) + (3a)(5)}{7a}$$

$$x = \frac{35a}{7a} \Rightarrow x = 5$$

$$y = \frac{(4a)(y'_1) + 3a(y'_2)}{3a + 4a}$$

$$y = \frac{(4a)(-12) + 3a(16)}{7a}$$

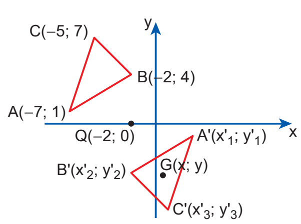
$$y = \frac{(-48a + 48a)}{7a} \Rightarrow y = 0$$

$\therefore$ H(5; 0)

Clave A

Resolución de problemas

26. Graficamos el plano cartesiano:



Si Q(–2; 0) es el punto de simetría:

$\Rightarrow$ Se cumple AQ = QA'

BQ = QB'

CQ = QC'

$A' = \text{Sim}A_{(Q)}$

$(x'_1; y'_1) = \text{Sim}(x_1; y_1)_{(Q)}$

$(x'_1; y'_1) = \text{Sim}(-7; 1)_{(Q)}$

$B' = \text{Sim}B_{(Q)}$

$(x'_2; y'_2) = \text{Sim}(x_2; y_2)_{(Q)}$

$(x'_2; y'_2) = \text{Sim}(-2; 4)_{(Q)}$

$C' = \text{Sim}\ C_{(Q)}$

$(x'_3; y'_3) = \text{Sim}\ (x_3; y_3)_{(Q)}$

$(x'_3; y'_3) = \text{Sim}\ (-5; 7)_{(Q)}$

Q (–2; 0) = (x_0; y_0)

$x'_1 = 2x_0 - x_1$

$x'_1 = 2(-2) - (-7)$

$x'_1 = 3$

$x'_2 = 2x_0 - x_2$

$x'_2 = 2(-2) - (-2)$

$x'_2 = -2$

$x'_3 = 2x_0 - x_3$

$x'_3 = 2(-2) - (-5)$

$x'_3 = 1$

$y'_1 = 2y_0 - x_1$

$y'_1 = 2(0) - 1$

$y'_1 = -1$

$y'_2 = 2y_0 - y_2$

$y'_2 = 2(0) - (4)$

$y'_2 = -4$

$y'_3 = 2y_0 - x_3$

$y'_3 = 2(0) - (7)$

$y'_3 = -7$

$\Rightarrow$ A'(3; –1) B'(–2; –4) C'(1; –7)

Tenemos los 3 vértices del nuevo triángulo A'B'C', por lo tanto podemos hallar su baricentro G(x; y):

$$x = \frac{1}{3}(x'_1 + x'_2 + x'_3)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(3 + (-2)) + 1) \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

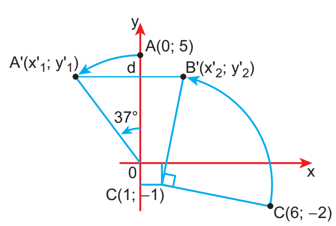
$$y = \frac{1}{3}(y'_1 + y'_2 + y'_3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}((-1) + (-4) + (-7)) \Rightarrow y = -4$$

$G\left(\dfrac{2}{3}; -4\right)$

Clave B

27. Graficamos el plano cartesiano:



Primero:

Rotación de A(x_1; y_1) = (0; 5)

Centro de giro: O(x_0; y_0) = (0; 0)

$A' = \text{Rot}(0; 5)_{(O;\,37°)}$

α

Sabemos:

$x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\alpha = 37°$

$x_1 = 0$; $y_1 = 5$

Hallamos A', por propiedad:

$x'_1 = x_1\cos\alpha - y_1\text{sen}\alpha$

$x'_1 = (0)\cos(37°) - 5\text{sen}(37°)$

$x'_1 = -5 \times \dfrac{3}{5} \Rightarrow x'_1 = -3$

$y'_1 = x_1\text{sen}\alpha + y_1\cos\alpha$

$y'_1 = (0)\text{sen}(37°) + 5\cos(37°)$

$y'_1 = 5 \times \dfrac{4}{5} \Rightarrow y'_1 = 4$

A'(–3; 4)

Rotación de B(x_2; y_2) = (6; –2)

Centro de giro:

C(x_0; y_0) = (1; –1)

$B' = \text{Rot}(6; -2)_{(C;\,90°)}$

α

Sabemos:

$x_0 = 1$; $y_0 = -1$; $\alpha = 90°$

$y_2 = 6$; $y_2 = -2$

Hallamos B'(x'_2; y'_2), por propiedad:

$x'_2 = x_0 - (y_2 - y_0)$

$x'_2 = 1 - (-2 - (-1))$

$x'_2 = 1 + 2 - 1 \Rightarrow x'_2 = 2$

$y'_2 = y_0 + (x_2 - x_0)$

$y'_2 = -1 + (6 - 1)$

$y'_2 = -1 + 6 - 1 \Rightarrow y'_2 = 4$

B'(2; 4)

Teniendo los puntos A'(–3; 4) y B'(2; 4) podemos calcular la distancia entre ellos:

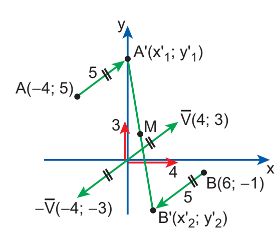
$$d = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (4 - 4)^2}$$

d = 5

Clave B

28. Graficamos el plano cartesiano:



A'M = MB'

Designamos:

$A' = (x'_1; y'_1)$

$B' = (x'_2; y'_2)$

Primero: traslación de $A(x_1; y_1)$ en dirección $V(x_0; y_0) = (4; 3)$

$(x_1'; y_1') = \text{Tras } (-4; 5)_{(\vec{V};\, 5)}$

$x_1' = x_1 + x_0$

$x_1' = -4 + 4 \Rightarrow x_1' = 0$

$y_1' = y_1 + y_0$

$y_1' = 5 + 3 \Rightarrow y_1' = 8$

$A'(0; 8)$

Segundo: traslación de $B(y_2; y_2)$ en dirección $-\vec{V}(x_0; y_0) = (-4; -3)$

$(x_2'; y_2') = \text{Tras } (6; -1)_{(-\vec{V};\, 5)}$

$x_2' = x_2 + x_0$

$x_2' = 6 + (-4) \Rightarrow x_2' = 2$

$y_2' = y_2 + y_0$

$y_2' = -1 + (-3) \Rightarrow y_2' = -4$

$B'(2; -4)$

Como tenemos $A'(0; 8)$ y $B'(2; -4)$ podemos calcular $M(x; y)$ que es el punto medio entre ambos:

$$x = \frac{x_1' + x_2'}{2} \Rightarrow x = \frac{0+2}{2} \Rightarrow x = 1$$

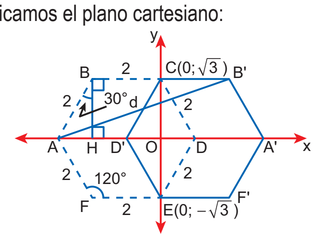
$$y = \frac{y_1' + y_2'}{2} \Rightarrow y = \frac{8 + (-4)}{2} \Rightarrow y = 2$$

$M(1; 2)$

Clave B

29. Piden: AB'

Graficamos el plano cartesiano:



Hallamos las coordenadas de A.

El $\Delta CD'D$ es equilátero

$\Rightarrow CD = D'D = D'C = 2$

$D'O = OD$ (por simetría)

$D'O = OD = 1$

$\Rightarrow AO = AD' + DO$

$AO = 2 + 1$

$AO = 3$

$A \in -\vec{x}$

$A = (-3; 0)$

Hallamos las coordenadas de B'.

El ⊿AHB es notable de 30° y 60°

Como $AB = 2 \Rightarrow AH = 1$

Como $BC = 2 \Rightarrow BH = \sqrt{3}$

$\Rightarrow B = (-2; \sqrt{3})$

$B \in IIQ$

Por simetría:

$B' = \text{Sim } B_{(\vec{y})}$

$B' = \text{Sim}(-2; \sqrt{3})_{(\vec{y})}$

$B' = (2; \sqrt{3})$

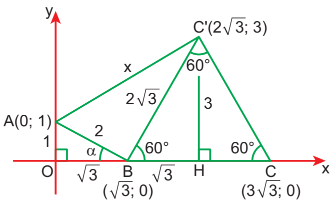
Finalmente:

$AB' = \sqrt{(2-(-3))^2 + (\sqrt{3}-0)^2}$

$AB' = \sqrt{25+3} \Rightarrow AB' = 2\sqrt{7}$

Clave C

30. Piden $AC' = x$



Si O es el origen de coordenadas (0, 0); en el ⊿AOB $\alpha = 30°$, pues el ⊿AOB es notable (de 30° y 60°).

Luego rotamos el punto C:

$C' = \text{Rot } C_{(B;\, 60°)}$ en sentido antihorario

$C' = \text{Rot } (3\sqrt{3}; 0)_{(B; 60°)}$

Luego: $BC = CC' = 2\sqrt{3}$

El $\Delta BCC'$ es equilátero de lado $2\sqrt{3}$.

El ⊿BHC' es notable de 60°:

$\Rightarrow C'H = 3$ y $BH = \sqrt{3} \Rightarrow OH = 2\sqrt{3}$

$C' = (2\sqrt{3}; 3)$

Luego $AC' = x$; tenemos $A(0; 1)$ y $C'(2\sqrt{3}; 3)$

$\Rightarrow AC' = \sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2 + (3-1)^2}$

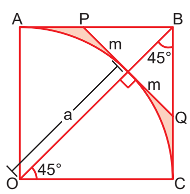
$x = \sqrt{4 \times 3 + 4}$

$x = 4$

Clave C

MARATÓN MATEMÁTICA (página 111)

1.



Paso 1:

$a + m = a\sqrt{2} \Rightarrow m = a(\sqrt{2} - 1)$

$A_{\Delta PBQ} = \dfrac{2m(m)}{2} = m^2$

$\Rightarrow A_{\Delta PBQ} = a^2(3 - 2\sqrt{2})$

Paso 2:

Área del cuadrante: $\dfrac{\pi a^2}{4}$

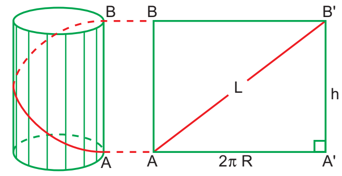
Asomb. $= A_{ABCD}$ − Área del cuadrante $- A_{\Delta PBQ}$

Asomb. $= a^2 - \dfrac{\pi a^2}{4} - a^2(3 - 2\sqrt{2})$

Asomb. $= \left(\dfrac{8\sqrt{2} - 8 - \pi}{4}\right)a^2$

Clave E

2.



Para que "L" sea mínimo tiene que ser diagonal del desarrollo del área lateral.

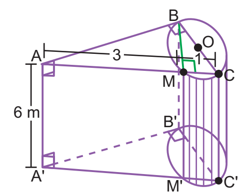
Si: $R = 1$ y $h = 2$

$\Rightarrow L^2 = (2\pi)^2 + 2^2$

$L = 2\sqrt{1 + \pi^2}$

Clave D

3.



Área $AMM'A' = 18\ m^2 = AA' \times AM \Rightarrow AM = 3$

Área $MCC' = 6\ m^2 = AA' \times MC \Rightarrow MC = 1$

Por propiedad:

$BC^2 = AC \times MC = (3 + 1)(1) = 4$

$\Rightarrow BC = 2$

$\therefore$ radio: $OC = 1$

Volumen del cilindro: $\pi r^2 h$

$\Rightarrow \pi(1)^2 6 = 6\pi$

Clave E

4. Por propiedad; hallamos los volúmenes de los anillos:

$V_I = \dfrac{1}{6}\pi(AB)^2(h) = \dfrac{1}{6}\pi h^3$

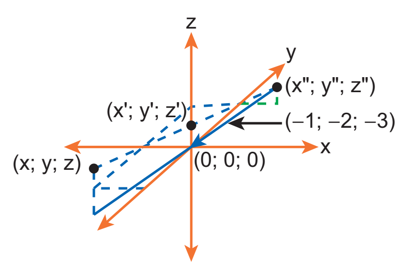
$V_{II} = \dfrac{1}{6}\pi(A'B')^2(h) = \dfrac{1}{6}\pi h^3$

Relación:

$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{\frac{1}{6}\pi h^3}{\frac{1}{6}\pi h^3} = 1$$

Clave A

5.



Paso 1: del centro de coordenadas.

Si se traslada (−1; −2; −3) y resulta (0; 0; 0)

$\Rightarrow (x"; y"; z") = (1; 2; 3)$

Paso 2: simétrico respecto del eje "y";

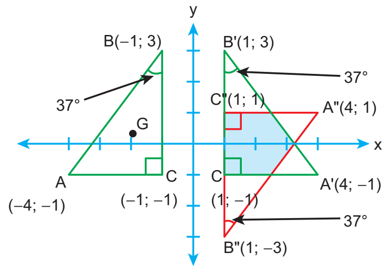
$\Rightarrow (x'; y'; z') = (-x"; y"; -z") = (-1; 2; -3)$

Paso 3: simétrico respecto del eje "x";

$\Rightarrow (x; y, z) = (x'; -y'; -z') = (-1; -2; 3)$

Clave B

6.



Paso 1: hallamos el punto A

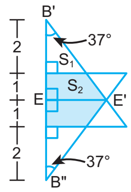
$$A = (x; y) \begin{cases} -2 = \dfrac{-1-1+x}{3} \Rightarrow x = -4 \\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{3-1+y}{3} \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$A = (-4; -1)$

Paso 2: hallamos simetría axial

$A' \Rightarrow A = (-4; -1) \Rightarrow A' = (4; -1)$
$B' \Rightarrow B = (-1; 3) \Rightarrow B' = (1; 3)$
$C' \Rightarrow C = (-1; -1) \Rightarrow C' = (1; -1)$
$A'' \Rightarrow A = (-4; -1) \Rightarrow A'' = (4; 1)$
$B'' \Rightarrow B = (-1; 3) \Rightarrow B'' = (1; -3)$
$C'' \Rightarrow C = (-1; -1) \Rightarrow C'' = (1; 1)$

Paso 3: hallamos el área



$$S_L = \frac{2 \times 2 \times \tan 37°}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{3 \times 3 \times \tan 37°}{2} = \frac{27}{8}$$

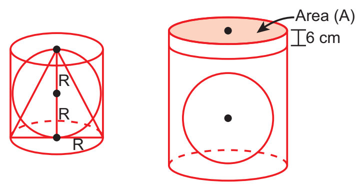
$$\Rightarrow S_2 = \frac{27}{8} - \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$$

$\therefore$ Como es simétrico

$$2S_2 = 2 \times \frac{15}{8} = \frac{15}{4}$$

Clave A

7.



Paso 1:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3;\ V_{cono} = \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

$V_{esfera} = (A)(6)$; $V_e + V_c = (A)(x)$

$$\frac{V_{esfera}}{V_{esfera} + V_{cono}} = \frac{(A)(6)}{(A)(x)} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 9 \text{ cm}$$

Clave B